



UNIVERSIDAD JOSÉ CARLOS MARIÁTEGUI

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

TESIS

**LOS NIVELES DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO
APLICADOS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN EL
SEGUNDO AÑO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA DE LA I.E.E.
FRANCISCO ANTONIO DE ZELA - TACNA EN EL AÑO 2018.**

PRESENTADO POR:

POMA HUANCA, David Guzman

ASESOR

Dr. FLORES AROCUTIPA, Javier Pedro

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE

LA EDUCACIÓN CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA

MOQUEGUA PERÚ

2021

CONTENIDO

PORTADA	
PÁGINA DE JURADOS	i
DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
CONTENIDO	iv
ÍNDICE DE TABLAS	x
ÍNDICE DE FIGURAS	xi
RESUMEN	xii
ABSTRACT	xiii
INTRODUCCIÓN	xiv
CAPÍTULO I: EL PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN	1
1.1. Descripción de la realidad problemática	1
1.2. Definición del problema	4
1.2.1. Problema General	4
1.2.2. Problemas Específicos	5
1.3. Objetivo de la investigación	5
1.3.1. Objetivo General	5
1.3.2. Objetivos Específicos	5

1.4. Justificación y limitaciones de la investigación	6
1.4.1. Justificación	6
1.4.2. Limitaciones	6
1.5. Variables	7
1.5.1. Identificación de variables	7
1.5.2. Definición de las variables	7
1.5.3. Operacionalización de variables	8
1.6. Hipótesis de la investigación	9
1.6.1. Hipótesis general	9
1.6.2. Hipótesis específicas	9
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO	10
2.1. Antecedentes de la investigación	10
2.1.1. Antecedentes internacionales	10
2.1.2. Antecedentes nacionales	16
2.1.3. Antecedentes regionales	18
2.2. Bases teóricas	20
2.2.1. Niveles de logro.	20
2.2.2. Rendimiento académico	21
2.2.3. Pensamiento matemático	22
2.2.4. Definiciones que sustentan el enfoque por competencias	26
2.2.4.1 Competencia	26

2.2.4.2. Estándares de aprendizaje	26
2.2.4.3. Capacidad	26
2.2.4.4. Desempeño	27
2.2.4.5. Habilidad	27
2.2.4.6. Los conocimientos	27
2.2.4.7. La actitud	27
2.2.5. Aproximaciones al aprendizaje de la matemática	27
2.2.6. Situaciones didácticas	29
2.2.7. Procesos didácticos de la matemática	29
2.2.7.1 Familiarización con el problema	30
2.2.7.2. Búsqueda y ejecución de la estrategia	31
2.2.7.3. Socialización y representación	32
2.2.7.4. Reflexión y formalización	33
2.2.7.5. Planteamiento de otros problemas	34
2.2.8. Capacidades matemáticas	36
2.2.9. Competencias y capacidades matemáticas	36
2.2.9.1 Resuelve problemas de cantidad	36
2.2.9.2. Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio	37
2.2.9.3. Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	37
2.2.9.4. Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.	37

2.2.10. Métodos de resolución de problemas.	38
2.2.10.1. Método de George Polya	38
2.2.10.2. Método de Guzmán.	41
2.2.10.3. Resolución de problemas según Alan Schoenfeld	43
2.2.10.4. Mason, Burton y Stacey	45
2.2.10.5. El método Heurístico de Bransford y Stein.	46
2.2.10.6. Modelo de Descartes.	47
2.2.10.7. El modelo de Wallas.	48
2.2.11. Propuesta de Métodos de resolución de problemas.	49
2.2.12. Modelo matemático Heurístico.	51
2.2.13. Un modelo para el desarrollo del pensamiento matemático.	52
2.2.14. Los procesos cognitivos.	54
2.2.14.1. La percepción.	54
2.2.14.2. La atención	54
2.2.14.3. La memoria.	55
2.2.14.4. Pensamiento.	55
2.2.14.5. Lenguaje.	56
2.3. Marco conceptual	57
2.3.1. Definiciones operacionales.	57
2.3.1.1. Niveles del pensamiento matemático.	57
2.3.1.2. Los niveles de pensamiento geométrico.	58
2.3.1.3. Fases del proceso de enseñanza bajo el modelo	

Van Hiele.	60
CAPÍTULO III: MÉTODO	61
3.1. Tipo de investigación	61
3.2. Diseño de investigación	62
3.3. Población y muestra	62
3.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos	63
3.4.1. Técnica	63
3.4.2. Instrumento	63
3.5. Técnicas de procesamiento y análisis de datos	63
3.6. Medida de tendencia central	64
3.7. Medidas de dispersión	64
3.8. Análisis de datos	65
3.9. Validez de los instrumentos de evaluación	66
CAPÍTULO IV: PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	67
4.1. Presentación de resultados por variables	67
4.2. Contrastación de hipótesis	68
4.3. Discusión de resultados	74
CAPÍTULO V: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	79
5.1. Conclusiones	79
5.2 recomendaciones	81

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	83
ANEXOS	87

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Operacionalización de variables	08
Tabla 2 Tabla de población y muestra	62
Tabla 3 : Niveles de logro en el grupo de control y experimental (Pre test y post test).	67
Tabla 4: Cuadro de interpretación de medida descriptiva.	68
Tabla 5: Cuadro de aplicación de prueba Chi-cuadrado para sub hipótesis 1.	69
Tabla 6: Cuadro de aplicación de prueba Chi-cuadrado para sub hipótesis 2.	71
Tabla 7: Comparación de los niveles de logro Entrada – salida y ECE Nacional.	144

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Prueba de hipótesis usando prueba de hipótesis relacionadas.	72
Figura 2: Comparación de los niveles de logro Entrada – salida y ECE Nacional.	145
Figura 3. Histórico –Área matemática UGEL TACNA	146

RESUMEN

El proceso de enseñanza debiera conducir a un aprendizaje óptimo, el proceso de transición hacia la aplicación del enfoque por competencias, se está dando, aún no se concretiza, por ello, haré un esfuerzo por caracterizar y aportar a la mejora de los aprendizajes. El propósito de este trabajo es determinar la eficacia de la aplicación de los niveles del pensamiento matemático en la enseñanza de la matemática en estudiantes del segundo año de educación secundaria de la Institución Educativa Emblemática Francisco Antonio de Zela, respecto a las evaluaciones censales regionales y nacionales tomadas en el año 2018.

Esto implicó varias etapas, desde la capacitación a los docentes, la elaboración de recursos y materiales hasta su aplicación, para ello se sometió a su validación mediante aplicación de cálculos estadísticos y su respectiva interpretación. Al analizar los resultados, demuestro que la aplicación de los niveles del pensamiento matemático en la enseñanza de la matemática en estudiantes del segundo año de educación secundaria de la Institución Educativa Emblemática Francisco Antonio de Zela sí dio resultados satisfactorios.

PALABRA CLAVE: Niveles de logro, pensamiento matemático, competencia.

ABSTRACT

The teaching process should lead to optimal learning, the transition process towards the application of the competence approach is taking place, it has not yet materialized, therefore, I will make an effort to characterize and contribute to the improvement of learning.

The purpose of this work is to determine the effectiveness of the application of the levels of mathematical thinking in the teaching of mathematics in students of the second year of secondary education of the Francisco Antonio de Zela Emblematic Educational Institution, with respect to regional and national census evaluations taken in 2018.

This involved several stages, from the training of teachers, the preparation of resources and materials to their application, for which it was submitted to their validation through the application of statistical calculations and their respective interpretation. When analyzing the results, I show that the application of the levels of mathematical thinking in the teaching of mathematics in students of the second year of secondary education of the Francisco Antonio de Zela Emblematic Educational Institution, that they gave satisfactory results.

KEY WORDS: achievement levels, Mathematical Thinking, competition

INTRODUCCIÓN

De las diversas corrientes pedagógicas existentes, ha sido el constructivismo la primera corriente que abordó el aprendizaje como una experiencia que debe partir con la manipulación de materiales físicos concretos, reconocer, medir, armar, construir, etc, posteriormente el aprendiz debe representarlo gráficamente, desde luego que la dificultad de ello depende de su edad y finalmente podrá aplicar algoritmos y fórmulas mediante operaciones que le permitan resolver situaciones problemáticas. Dicho proceso se sintetiza en tres niveles, concreto, gráfico y simbólico.

En nuestro país, con la implementación del diseño curricular nacional, se pasa de una educación por conocimientos a una educación por competencias, esto implica cambiar el enfoque, por lo que la corriente pedagógica que cumple con las condiciones para la implementación de este enfoque, es el constructivismo, así lo propone el ministerio de educación partiendo con la aplicación del diseño curricular nacional en sus diversas versiones, fortaleciendo con las rutas del aprendizaje y culminando con el currículo nacional, documento pedagógico que está en plena vigencia.

Si bien, esta propuesta se empezó a implementar con fuerza en educación primaria, especialmente en el segundo grado, luego cuarto grado hasta generalizar,

también pasó a implementarse en educación secundaria, con todas las dificultades que ello implicaba, es así que empezamos con talleres de formación de docentes en la aplicación de la nueva propuesta pedagógica bajo el enfoque por competencias, y su medición mediante las evaluaciones censales regionales y nacionales aplicados por las entidades correspondientes del sector educación.

Por lo tanto, el tránsito de una educación tradicional o por conocimientos hacia un enfoque por competencias es una gran dificultad porque implica preparar al docente en este proceso, ello significa partir del conocimiento del constructivismo, sus fundamentos pedagógicos, su forma de aplicación para desarrollar competencias y a través de esta investigación, determinar ¿Cuál es el nexo entre los niveles de construcción del pensamiento matemático y los niveles de logro en las estudiantes del segundo año de Educación secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela durante el año 2018?

El objetivo es examinar y determinar los niveles del pensamiento matemático en las alumnas del segundo año de Educación secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela, partiendo de la hipótesis de que existe una relación directa entre el pensamiento matemático y los niveles de logro en matemática en las alumnas del segundo año de Educación secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela durante el año 2018.

El presente trabajo está estructurado en cinco capítulos que a continuación los describo. En el primer capítulo se considera el planteamiento del problema, los objetivos generales y específicos, justificación, limitaciones, variables e hipótesis de estudio.

El segundo capítulo está desarrollado los antecedentes nacionales e internacionales que trataron este tema de investigación y su marco teórico, teorías y corrientes pedagógicas que sustentan el presente trabajo así como las bases teóricas propuestas por el ministerio de educación del Perú en el marco de la implementación del enfoque por competencias.

El capítulo III está relacionado a la metodología de investigación, su diseño, la población y la muestra, técnicas e instrumentos usados para el recojo y análisis y procesamiento de datos.

El capítulo IV está considerado para la presentación y análisis de resultados obtenidos en este trabajo de investigación y las discusiones correspondientes.

Finalmente, en el último capítulo se plantea las conclusiones y las respectivas recomendaciones del presente trabajo de investigación.

CAPÍTULO I: EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Descripción de la realidad problemática.

La educación tradicional, basada en la adquisición de conocimientos, ya sea mediante estímulos y respuestas como propone el Conductismo, o en el almacenamiento ordenado y decodificado de la información que es recibida, propuesto por el Cognitivismo, tienen sus ventajas y desventajas. Fundamentalmente es que la información y el crecimiento de la cantidad de conocimiento que se produce a cada instante, es imposible de ser almacenado en cualquier cerebro humano, no existe tal capacidad, es más, estamos en la necesidad de adquirir conocimiento, sin embargo no es suficiente si ese conocimiento adquirido, no lo podemos utilizar para resolver las situaciones problemáticas que enfrentamos a cada momento debido al continuo avance de la ciencia y a la cantidad de situaciones problemáticas que se ven generando en nuestro entorno local, regional, nacional y podríamos afirmar hasta mundial a cada momento de nuestra vida diaria.

Luego nace el Constructivismo, como una propuesta basada en la construcción de los aprendizajes a partir de la propia experiencia en un contexto real, de tal manera que el conocimiento adquirido, sea significativo, tenga valor y sea de utilidad para enfrentar situaciones problemáticas de la vida real. Esta experiencia que requiere realizar el aprendiz, lo debe llevar a cabo en el campo real, experimentar con material concreto, debe diseñar, construir, manipular, realizar mediciones, etc, luego resolver situaciones problemáticas que en ella se planteen. Posteriormente, puede hacer representaciones gráficas de los materiales utilizados, luego realizar representaciones simbólicas y finalmente realizar formalizaciones, extracción de fórmulas y aplicación de lo aprendido a la resolución de nuevas situaciones problemáticas, es más, deberían los estudiantes estar en la capacidad de plantear nuevas situaciones problemáticas como pide actualmente el ministerio de educación.

Piaget, es el principal representante del constructivismo junto a Vigotsky, Lave y Wenger, Bransford, Hasselbring, Grabinger, Spiro y Cols entre otros.

Es así que Jean Piaget, establece que el aprendiz hasta algo más de los 12 a 13 años, asimilan definiciones y propiedades estableciendo relaciones entre conceptos matemáticos en tres niveles claramente establecidos y definidos, que son:

- a) Nivel de intuición – concreto.
- b) Nivel de representación – gráfico.
- c) Nivel de conceptualización – simbólico.

El problema básicamente consiste en que en el enfoque tradicional, el docente es el protagonista de tal proceso y la enseñanza de la matemática se remite básicamente al nivel **conceptual simbólico**, por lo que las nociones matemáticas que construye el estudiante son netamente en el nivel abstracto. Está desvinculado de la realidad, el estudiante no entiende su importancia, no logra concebir sus aplicaciones, y el proceso de aprendizaje no tiene significatividad, en tal caso, no halla el sentido y la importancia de lo que aprende. Se torna memorístico a través de la aplicación de determinadas fórmulas, no las construye, y finalmente, el estudiante es sometido a evaluaciones igualmente basado solo el conocimiento adquirido con escasos casos de aplicación a la resolución de situaciones problemáticas de contexto y de la vida real.

El enfoque por competencias en matemática, promueve el resolver problemas como su enfoque, por ello plantea una serie de condiciones desde la planificación curricular a través de las rutas del aprendizaje hasta la implementación del currículo nacional el cual se está llevando a cabo progresivamente. En las sesiones de aprendizaje, promueve su planificación mediante los procesos pedagógicos y el desarrollo de las capacidades y sus desempeños se formaliza mediante los procesos didácticos, para ello, plantea métodos para la resolución de problemas, métodos como Polya, Guzmán, Van Hiele, etc, en las rutas del aprendizaje propone las fases para la resolución de problemas, plantea sus respectivas estrategias heurísticas, el uso de materiales

educativos y recursos didácticos y propone el desarrollo y la construcción del pensamiento matemático mediante sus respectivos niveles y procesos.

1.2. Definición del problema.

1.2.1. Problema General

Ante el proceso de construcción tradicional de las nociones matemáticas orientados al nivel abstracto basado en un enfoque por conocimientos, y ante el cambio permanente de la sociedad, de sus necesidades, sus problemas y frente a la propuesta pedagógica basada en un enfoque por competencias, es que en matemática el Ministerio de Educación plantea el **enfoque de resolución de problemas**, en los que promueve el uso de recursos didácticos y materiales educativos, que permitan construir los conocimientos matemáticos desde el nivel **concreto** con la vivenciación y manipulación pasando por el **nivel gráfico** - simbólico, hasta el nivel **abstracto**. Pretendo en el presente trabajo de investigación la aplicación de los niveles del pensamiento matemático en alumnas del segundo año de educación secundaria en la I.E.E. Francisco Antonio de Zela – Tacna.

De lo anteriormente expresado, formulo la siguiente interrogante:

¿Cuál es el nexo entre el pensamiento matemático y los niveles de logro en las estudiantes del segundo año de Educación secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela durante el año 2018?

1.2.2. Problemas específicos

- a) ¿Cómo son los niveles del pensamiento matemático de las estudiantes del segundo año de secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela?
- b) ¿Cuáles son los niveles de logro de las estudiantes del segundo año de secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela?
- c) ¿Cómo es la relación entre el pensamiento matemático y los niveles de logro en matemática en las estudiantes del segundo año I.E.E. Francisco Antonio de Zela?

1.3. Objetivo de la investigación.

1.3.1. Objetivo General

Establecer el nexo entre el pensamiento matemático y los niveles de logro en matemática en las alumnas del segundo año de Educación secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela durante el año 2018.

1.3.2. Objetivos específicos

- a) Determinar los niveles del pensamiento matemático en las alumnas del segundo año de Educación secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela.
- b) Examinar el rendimiento académico de las estudiantes del segundo año de Educación secundaria de la Institución Educativa Francisco Antonio de Zela.
- c) Establecer el nexo entre la aplicación de los niveles del desarrollo del pensamiento matemático y los niveles de logro en matemática en las alumnas del segundo año Institución Educativa Francisco Antonio de Zela.

1.4. Justificación y limitaciones de la investigación.

1.4.1. Justificación.

Este trabajo de investigación “Los niveles del pensamiento matemático aplicados en la enseñanza de la matemática en el 2° año de secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela – Tacna”, se justifica en la medida que ante la poca utilización de los materiales educativos y recursos didácticos en el aprendizaje en el área de la matemática, y ante un promedio relativamente bajo en los niveles de logro obtenidos por las estudiantes, es que de acuerdo al enfoque por competencias propuestas por el MINEDU y el enfoque del área, es que proponemos la aplicación de estos niveles de construcción del pensamiento matemático para elevar los niveles de logro en ésta área. Cabe destacar que el presente trabajo de investigación nos permitiría demostrar que la propuesta pedagógica del MINEDU, es aplicable a nuestra realidad demostrando que mediante su aplicación se consiga mejores niveles en el logro de aprendizajes de nuestras estudiantes.

1.4.2. Limitaciones.

Una de las limitaciones encontradas, es la reciente implementación del enfoque por competencias en la educación secundaria por parte del ministerio de educación, sin embargo en educación primaria ya son observables los resultados, este proceso de implementación requiere un tránsito en el docente de una enseñanza tradicional bajo el enfoque por conocimientos hacia el desarrollo de capacidades para lograr competencias, por lo expuesto, sobre su reciente

implementación en la educación peruana, existen escasos trabajos de investigación nacionales en educación secundaria.

Otra limitación que se tuvo es el cambio de docentes ya sea por proceso de contrato y reasignaciones, que afectó a algunas aulas de segundo año, pero se hizo el seguimiento necesario para que los resultados obtenidos no sean afectados.

También se pudo observar como una dificultad, la escases de recursos y materiales educativos y didácticos para una implementación óptima de los procesos didácticos del área, recursos que en años posteriores, el ministerio de educación, la dirección regional sectorial de educación así como la unidad de gestión educativa local lleva a cabo un proceso continuo de implementación de las instituciones educativas con materiales y recursos didácticos.

1.5. variables

1.5.1. Identificación de variables

Variable independiente: Los niveles del pensamiento matemático

Variable dependiente: Niveles de logro

1.5.2. Definición de las variables

a) **Variable independiente:**

Los niveles del pensamiento matemático. Es el proceso de construcción del conocimiento matemático partiendo de un nivel concreto, pasando a un nivel gráfico y culminando en el nivel abstracto.

b) Variable dependiente:

Niveles de logro. Son las características y descripciones de las habilidades y conocimientos que se espera logren demostrar los estudiantes luego de protagonizar un proceso de aprendizaje.

1.5.3. Operacionalización de las variables

Tabla 1

Operacionalización de las variables

Variables	Dimensiones	Indicadores	Escala
Los niveles del pensamiento matemático	El pensamiento matemático	Nivel concreto Nivel gráfico Nivel abstracto.	Escala cuantitativa
Los niveles de logro	Enfoque por conocimientos Enfoque por competencias	El conductismo. El constructivismo	

Fuente: Elaboración propia

1.6. Hipótesis de la investigación

1.6.1. Hipótesis general

La aplicación de los niveles de desarrollo del pensamiento matemático eleva los niveles de logro en matemática en las estudiantes del segundo año de Educación secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela, en el año 2018.

1.6.2. Hipótesis específicas

- a) Los niveles del pensamiento matemático de las alumnas del segundo año de secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela., es deficiente.
- b) Los resultados de logro de las estudiantes del segundo año de secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela, al aplicar los niveles de pensamiento matemático, es regular.
- c) La aplicación de los niveles de desarrollo del pensamiento matemático influye en los niveles de logro en matemática en las estudiantes del segundo año I.E.E. Francisco Antonio de Zela.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes de la investigación.

2.1.1. Antecedentes internacionales

(Franco, 2015) propuso la construcción de material didáctico para fortalecer el pensamiento matemático mostrando los siguientes resultados:

La aplicación del material concreto acompañado de una buena orientación, supervisión y control resulta ser un buen recurso para el logro de los objetivos establecidos y que desencadenan en una nueva metodología de enseñanza. Los exámenes de diagnóstico empleados en el macro proyecto ejecutado en el Semillero Interdisciplinar de Educación matemática lograron de manera significativa la mejora del rendimiento académico escolar. Basándose en el libro sobre la metodología de la enseñanza de la matemática propuesta por (Fernandez, 1994) propone que “la manipulación de materiales, su representación gráfica y la simbolización

aplicados a distintas asignaturas de ciencias valida su eficacia”. La manipulación del material concreto no estructurado, es decir los materiales educativos, por parte de los alumnos facilita el aprendizaje de la matemática. El uso y la manipulación del material educativo concreto juega un rol trascendental en el momento de la adquisición de las nociones matemáticas, sin embargo, es el docente quien, a través de la retroalimentación, permite verificar el cumplimiento de los objetivos propuestos. (Franco, 2015)

(Díaz, 2018) muestra en su trabajo algunas conclusiones como:

El desarrollo veloz de la ciencia y tecnología demanda el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes para su adecuado desenvolvimiento en su contexto real como en nuevos escenarios o ámbitos de acción. La incorporación intencional de los materiales a los métodos para la resolución de problemas acompañado de una adecuada estrategia heurística estimula el desarrollo del pensamiento matemático evidenciándose un progreso en el aprendizaje de los estudiantes. También se observa una mayor rapidez en la capacidad de razonamiento para la resolución de problemas matemáticos ya que se logra diseñar una estrategia adecuada llegando a obtener resultados satisfactorios en los niveles de logro de los estudiantes. Es el docente quien debe implementar un uso adecuado de los materiales educativos planificando un

acompañamiento pertinente de una estrategia heurística observándose un buen desempeño en los niveles del desarrollo del pensamiento matemático.

(Guzmán, 2014) acerca del pensamiento matemático mediante el aprendizaje significativo señala que al realizar el trabajo de investigación centrado en los estudiantes para analizar su desarrollo cognitivo de tal manera que su aprendizaje sea significativo y trascendente concluye:

En matemática, el uso del material educativo concreto permite al estudiante potenciar su pensamiento matemático, fortalecer su pensamiento lógico y así compenetrarse con las formas de representar gráfica y simbólicamente en la resolución de problemas. Ante el uso de los materiales educativos, es el docente quien requiere implementar las estrategias pedagógicas adecuadas para trabajarlas en las sesiones de aprendizaje. De esta manera se logra concretar un aprendizaje significativo. Hemos comprobado que se pueden verificar diversas teorías pedagógicas que soportan el presente trabajo de investigación, observándose la superación en los problemas que presentan los estudiantes al resolver problemas, por lo que mediante una jerarquización, clasificación y manipulación adecuada, permite desarrollar procedimientos pertinentes resolviendo eficientemente problemas matemáticos. La adquisición de las nociones matemáticas para resolver problemas en el nivel abstracto, es de mayor comprensión cuando se ha logrado manipular materiales para construir dichas nociones y propiedades matemáticas.

(García, 2013) en su tesis aplicado a alumnos de educación media obtiene las siguientes conclusiones:

Los juegos educativos y materiales didácticos son funcionales para el aprendizaje de las matemáticas demostrándose ello en el grupo experimental en comparación con la población o grupo de control. La aplicación de los materiales y juegos educativos eleva el aprendizaje de la matemática demostrándose el cumplimiento de los objetivos establecidos y la validación de las hipótesis. Logró determinarse una relación directa entre la metodología activa basada en los juegos y la mejora de los aprendizajes en contraposición con el proceso de aprendizaje tradicional. Por lo tanto, se concluye que los juegos educativos influyen en un mayor logro de las competencias, verificando en sus desempeños al resolver situaciones problemáticas en diversas aplicaciones matemáticas.

(Díaz J. , 2015) llega a las conclusiones que a continuación se muestran.

Se reconoce la homogeneidad en el desarrollo del pensamiento matemático y los aspectos que afectan de manera directa en el desarrollo de esta cualidad, los procesos lógicos, heurísticos y los metacognitivos del que se valen los estudiantes para aplicar correctamente una estrategia durante la resolución de problemas. La utilización de los datos para realizar deducciones lógicas en un problema es sustento para lograr desarrollar el

pensamiento matemático, porque si se tiene jerarquizado de manera lógica un sistema de conocimientos, tienen mayores posibilidades para aplicar y ejecutar diferentes estrategias heurísticas para la resolución de problemas matemáticos. Las estrategias heurísticas desarrollan en el estudiante procedimientos lógicos que implican una solución correcta de los problemas, estrategias que propician el desarrollo flexible y coherente del pensamiento matemático. Una adecuada estrategia heurística seleccionada y aplicada correctamente perfecciona el proceso enseñanza de la matemática ya que desarrolla el nivel del pensamiento matemático de los docentes y estudiantes cuando se ponen a resolver problemas matemáticos. (Díaz, 2015)

(Leiva, 2016) sobre el aprendizaje basado en problemas llega a las siguientes conclusiones:

El aprendizaje de las matemáticas suele restringirse solo a algunos estudiantes privilegiados ya que son los alumnos inteligentes o que tengan apoyo de un docente externo o una base teórica en matemática de alta calidad, sin embargo, el presente trabajo contradice tal tesis ya que algunas de estas afirmaciones pertenecen al Municipio de Chimalhuacán, (México), donde los resultados fueron contrarios. De este trabajo de investigación se puede deducir que las competencias pueden superarse si se aplica y orienta de manera adecuada. Si se parte de la teoría de Piaget, los niños de 14 y 15 años desarrollan operaciones abstractas, el

aprendizaje basado en resolver problemas puede aplicarse en los centros de estudio de la educación secundaria permitiendo mejorar el aprendizaje de la matemática. Solo, la condición es que el docente debe manejar el proceso de solución de problemas matemáticos. De esta manera, no se limita a una mera explicación de los métodos de resolución de problemas, sino a que logre interpretar correctamente los procesos y los resultados obtenidos. De los resultados que se obtuvieron del trabajo de investigación del aprendizaje resolviendo problemas permite obtener mejores logros en la matemática favoreciendo el desarrollo de las competencias que corresponden al pensamiento abstracto, permitiendo la resolución de problemas partiendo del análisis del problema e interpretar los resultados obtenidos habiendo pasado por el proceso de representación concreta y gráfico simbólico.

Puede observarse que estos argumentos tienen su sustento en el enfoque por conocimientos, aplicado a una educación tradicional, argumento que aún es bastante utilizado en la actualidad por los padres de familia, ya que hay una contradicción entre la forma como están aprendiendo sus hijos en la actualidad con la forma cómo aprendieron. Muchas veces se conflictúa más al estudiante cuando los padres pretenden apoyar desde la casa en la forma como aprendieron ellos, por ello la necesidad de brindar orientaciones por parte de los docentes a los padres de familia se hace urgente, dentro de esa articulación que debe fortalecerse entre escuela – familia y comunidad.

2.1.2. Antecedentes nacionales

(Pérez, 2014) hace referencia al desarrollo de capacidades de matemática en la cual cabe destacar algunas de sus conclusiones:

La estrategia aplicada en estos estudiantes produjo una mejoría significativa en el desarrollo de sus capacidades ya que implicó aplicar diferentes procesos entendiendo el desarrollo de un problema como un conjunto de pasos partiendo del entendimiento del problema hasta su explicación a partir de la reflexión sobre el significado del resultado del problema. También debo destacar entre sus recomendaciones, la importancia de la planificación de las sesiones de aprendizaje, en la que debe tenerse en cuenta las actividades a considerar para desarrollar cada una de las capacidades que los estudiantes deben efectuar para evidenciar estas capacidades como su proceso de aprendizaje.

(Huamanlazo, 2015) concluyó que “existe una relación significativa entre las estrategias didácticas que emplea el docente y el aprendizaje, entiéndase como niveles de logro alcanzados por los estudiantes del tercer grado de secundaria de la Institución educativa mencionada demostrada en una correlación muy alta obtenida mediante el coeficiente Rho de Spearman”.

(Del Castillo, 2008) concluye que existe una correlación significativa muy alta entre la práctica pedagógica formal del desempeño docente y los niveles de logro académico de los colegios de Lima metropolitana. Sin embargo, existe una abrumadora mayoría de docentes (87,93%) que presentan deficiencias moderadas a severas en el componente de la práctica didáctica de contenidos de su desempeño incluyendo una tendencia declinante en dicha práctica.

Si bien estos autores hacen referencia a las estrategias aplicadas en el proceso de enseñanza aprendizaje, y cómo estas estrategias mejoran el rendimiento académico en el enfoque tradicional, también ha de reflejarse dicho impacto en la mejora de los niveles de logro obtenidos por los estudiantes. De otro lado, al aplicar las estrategias, recurren al uso de material concreto, por lo que de manera implícita, se aplica los niveles de construcción del pensamiento matemático, sustento teórico propuesto por Jean Piaget y otros autores del enfoque socioconstructivista propuesto en el currículo nacional por parte del ministerio de educación del Perú. También es factible deducir que el uso de diferentes estrategias al resolver situaciones problemáticas, implica desarrollar las diferentes capacidades matemáticas, capacidades que se relacionan con los distintos autores que proponen métodos de resolución de problemas matemáticos en cuatro o más pasos o procedimientos.

2.1.3. Antecedentes regionales

(Guevara, 2017) en referencia a la aplicación de Polya como estrategia concluye que “la estrategia de Polya, permite elevar el rendimiento académico en los estudiantes, ya que cambia su pensamiento procedimental en la solución de problemas al acompañar de materiales como parte de los procesos de la resolución de problemas”

(Esteba & Gamarra, 2019) en su trabajo de investigación concluye que “la aplicación del software geogebra incrementa significativamente el nivel de logro de la competencia, resuelve problemas de forma, movimiento y localización del área de matemática de los estudiantes de cuarto de secundaria” después de la aplicación del software, permite sostener que éste tuvo un efecto positivo considerable.

(Villarroel, 2018) al referirse a los métodos de solución de problemas y el aprendizaje significativo concluye que “la relación entre el método solución del problemas con el aprendizaje significativo es directa, debido a que el método implica una secuencia sistemática que involucra procesos cognitivos y estrategias que hace que al resolver un problema, el aprendizaje sea significativo, y esto se observa al presentarles nuevos problemas a los estudiantes, éstos los resuelven con mayor eficacia”

En los antecedentes regionales, pese a los escasos trabajos de investigación realizados debido a la reciente aplicación del enfoque por competencias en educación secundaria, existen más trabajos de investigación al respecto en educación primaria.

En todo este proceso de implementación del enfoque por competencias, se observa la resistencia al cambio de enfoque inicialmente por parte de los mismos docentes, luego por los padres de familia, sin embargo, un referente de los resultados de la aplicación del enfoque por competencias son las evaluaciones censales nacionales ECE aplicados por el ministerio de educación.

Posteriormente se tuvo que enfrentar otro problema, es que al pasar de grado los estudiantes evaluados se enfrentaban nuevamente a docentes que aún no habían recibidos talleres de capacitación o en su defecto, presentaban resistencia al cambio de enfoque, problema que se fue resolviendo poco a poco en la educación primaria al ser evaluados nuevamente en grados superiores.

Finalmente se está enfrentando a otro problema que es el tránsito de la educación primaria a la educación secundaria, donde también se está enfrentando a docentes que proceden de una educación tradicional y un enfoque por conocimientos para transitar a un enfoque por competencias.

2.2. Bases teóricas.

2.2.1. Niveles de logro. Son las características y descripciones de las habilidades y conocimientos que se espera logren demostrar los estudiantes y son clasificados de la siguiente manera:

- a) **Nivel Satisfactorio.** Son estudiantes que plantean y resuelven problemas variados identificando estrategias y procesos para interpretar las nociones matemáticas en la resolución de problemas justificando sus resultados.
- b) **En proceso.** Son estudiantes que lograron superar el nivel de “En inicio”, ellos establecen condiciones al formular problemas matemáticos y resolver situaciones que implican hasta dos fases o procesos.
- c) **En inicio.** Estos estudiantes logran desarrollar nociones elementales de matemática y resuelven problemas aplicando procedimientos directos sin aplicar estrategias heurísticas diversas, y tienen dificultades al interpretar los resultados.
- d) **En Pre – inicio.** En este nivel, el estudiante no logra alcanzar los aprendizajes que corresponden al grado y que son prerrequisitos para ingresar al grado inmediatamente superior. Este análisis es necesario realizarlo teniendo en cuenta los estándares de aprendizaje propuestos en el currículo nacional organizados por ciclos.

2.2.2. Rendimiento académico.- Considerado en el enfoque tradicional como **cuantitativo**, es tratado ahora como el nivel de logro pero en una escala **cualitativa**, reflejado en el estudiante, a través del desarrollo de sus aprendizajes y la aplicación de estos conceptos adquiridos en la vida cotidiana de la persona. Varios son los autores que analizan y conceptúan el rendimiento académico, tal como se puede apreciar en las próximas definiciones.

a) Según (Leiva, 2016) “el rendimiento es el producto de la aplicación del esfuerzo del alumno junto con la enseñanza provista por la escuela – docente, condicionados por factores internos y externos al estudiante”

b) (Lamas, 2015) dice que “son procesos de aprendizaje que promueve la escuela e implican la transformación de un estado determinado en un estado nuevo; se alcanza con la integridad en una unidad diferente con elementos cognitivos y de estructura”. El rendimiento varía de acuerdo con las circunstancias, condiciones orgánicas y ambientales que determinan las aptitudes y experiencias.

2.2.3. Pensamiento matemático.

Cuando hablamos del pensamiento humano, nos referimos a las formas de razonar, al proceso de abstracción, al desarrollo de los procesos mentales y cómo éstos pueden entenderse desde el campo de la psicología. Por lo general, el ser humano demuestra su pensamiento a través del razonamiento por la necesidad de resolver un problema al cual se enfrenta continuamente adquiriendo ciertas habilidades. Por ello, se han realizado diversos estudios para entender el pensamiento del ser humano.

Así como la psicología trata de interpretar y entender cómo aprende el ser humano, el término pensamiento matemático, está referido a interpretar y entender cómo piensan los matemáticos para aprender, entender, interpretar y explicar las matemáticas para diseñar un modelo de los procesos mentales lógicos que despliega aquella persona que piensa matemáticamente.

Entonces surge la necesidad de estudiar al ser humano en sus distintas etapas de la vida, entender como construye su pensamiento matemático el niño, el adolescente, y el adulto, con la finalidad de mejorar los procesos educativos que deben aplicarse en los sistemas de educación en matemática.

En todo este proceso, el primer rasgo que se observa es el pensamiento lógico, es decir, usar procesos de razonamiento lógico en la resolución de cualquier situación problemática y su aprendizaje, el cual se plasma en la resolución de nuevos problemas con características similares. En el adolescente, nos permite reforzar estos procesos mentales para fortalecer habilidades y estrategias matemáticas para desarrollar el pensamiento lógico que les permita enfrentar distintas situaciones problemáticas. Desde luego, muchos profesionales matemáticos con orientaciones de psicología, tales como Poncairé, Freudhental, Polya, entre otros, dedicaron una gran parte de sus estudios, en entender el razonamiento matemático en el estudiante para sistematizarlo y mejorar sus aprendizajes.

Pero, Jean Piaget, es el de mayor consideración entre estos estudiosos, interpretó cómo el infante construye su noción de número, el razonamiento geométrico, la proporcionalidad y la probabilidad, las que se consideran hasta la actualidad para entender las nociones matemáticas. Sin embargo, inicialmente, la matemática se estructuró en base a currículos pertenecientes a la formalidad matemática, mecánica, memorística y de resolución mediante procesos algorítmicos, todo alejado de situaciones que implican su estudio en el campo real que tengan que ver con problemas de su entorno real.

Entonces, el pensamiento matemático puede interpretarse de distintas formas, tales como una reflexión de manera espontánea que realizan los matemáticos sobre nuestro entorno natural, otra, meramente formal sustentado en propiedades, teoremas, leyes, axiomas, fórmulas, etc. Y finalmente una tercera que implica resolver situaciones cotidianas utilizando el pensamiento matemático basado en la lógica.

Esta última, trata precisamente sobre la construcción del pensamiento matemático a partir del pensamiento lógico que desarrolla cualquier persona en base a procedimientos heurísticos. En la construcción de estas nociones matemáticas, pueden establecerse distintos niveles y procesos los cuales se manifiestan de manera incipiente en los infantes de educación inicial con nociones por ejemplo de agregar, quitar, comparar, etc. Éste infante, de acuerdo al progreso gradual en sus estudios irá construyendo conceptos y nociones matemáticas cada vez más complejas, los cuales, de acuerdo al enfoque de resolución de problemas no puede desvincularse lo concreto de lo simbólico ni mucho menos de la abstracción, nivel abstracto que debe interpretar el nivel concreto en cualquier situación problemática.

Para orientar al estudiante en estos niveles de construcción del pensamiento matemático, dice (Tourón, 1985) que “es necesario que el docente los domine y los aplique vinculando a los procesos pedagógicos, procesos didácticos” además de las capacidades de área y las fases de

resolución de problemas propuestos por Polya, De Guzmán, Van Hiele, entre otros.

Desde este punto de vista, entonces interesa las formas de aprender las matemáticas, para ello, el docente debe ser un especialista en proponer métodos, técnicas, estrategias y distintos recursos y materiales didácticos para la resolución de una misma situación problemática.

Tradicionalmente, la matemática debía ser dominada y enseñada por un virtuoso en la materia y el estudiante debía asimilar dichos conocimientos memorizando fórmulas y procedimientos que le conduzcan a resolver otros ejercicios y problemas similares resolviendo pruebas que implicaban llegar a la respuesta correcta. Pero, ante la multiplicación exponencial de los conocimientos, ya el ser humano se ve imposibilitado de absorber tanto conocimiento, sin embargo, ese conocimiento, de igual manera lo tenemos a nuestro alcance con el apoyo de la ciencia y la tecnología así como el acceso a los medios de comunicación e internet, con una cierta desventaja, hay información verdadera, pero también abunda mucha información falaz, por lo tanto, ¿Qué y cómo debe aprender el hombre? Surgen entonces, nuevas corrientes pedagógicas viéndose la necesidad de implementar en el campo educativo, el enfoque por competencias.

2.2.4. Definiciones que sustentan el enfoque por competencias

2.2.4.1. Competencia. Es un tipo de aprendizaje que supone una actuar complejo y consciente, que implica resolver una situación problemática de nuestro contexto modificándolo, alcanzar un propósito o resolver un problema real movilizand o distintas capacidades de manera coherente utilizando saberes y conocimientos sobre los cuales tenemos que desplegar habilidades cognitivas, socioemocionales, mostrar actitudes, procedimientos, técnicas, etc. Es decir en los estudiantes hay que desarrollar un conjunto de recursos y habilidades que le permita ser competente y así aplicar a cualquier contexto de manera pertinente y coherente.

2.2.4.2. Estándares de aprendizaje. Son las descripciones que se hacen respecto a una competencia y están estructurados en una complejidad ascendente o creciente partiendo desde un nivel de inicio hasta que el estudiante finalice su educación básica.

2.2.4.3. Capacidad. Es un saber delimitado más pequeño que una competencia, según el currículo nacional una capacidad vincula alguna habilidad cognitiva y un conocimiento, estas capacidades, combinándolas de manera pertinente, conduce al logro de la competencia. Estas capacidades deben generar sinergia entre ellas utilizando habilidades cognitivas, relacionales, disposiciones afectivas y de todas maneras, el conocimiento. Como se observa, el

enfoque por competencias no está nada alejado de los conocimientos como habremos escuchado muchas veces.

2.2.4.4. Desempeño. Los desempeños son aquellas descripciones de las actuaciones que demuestran los estudiantes respecto al nivel de logro de la competencia descrita en el estándar y se observan en los procesos cognitivos que nos permiten organizar la planificación y lograr una evaluación coherente.

2.2.4.5. La habilidad. Hace referencia a la capacidad, talento o aptitud que desarrolla una persona para realizar una determinada actividad o resolver una situación problemática de manera correcta o con éxito.

2.2.4.6. Los conocimientos. Comprende las teorías, conceptos, saberes científicos y ancestrales, procesos legados por la humanidad en diferentes campos del saber.

2.2.4.7. La actitud. Es la disposición libre y espontánea que muestra un individuo para actuar de acuerdo o en desacuerdo a una situación problemática determinada.

2.2.5. Aproximaciones al aprendizaje de la matemática

El concepto del enfoque por competencias hace que el docente se convierta en un mediador del aprendizaje, en un creador de condiciones capaces de producir en los estudiantes, la apropiación de los saberes locales y los conocimientos científicos. Esos son los conocimientos que les

debe permitir a los estudiantes involucrarse en distintas actividades o situaciones problemáticas para poder construir nuevos conocimientos.

En matemática, el aprendizaje de una propiedad, teorema o concepto, puede desarrollarse en largos periodos de tiempo, por ejemplo, según (Lamas, 2015) “se debe iniciar con el desarrollo de un proceso en términos concretos” es decir, el estudiante debe aprender conceptos matemáticos en el campo real para posteriormente pasar a las operaciones y de esta manera adquiriendo un concepto operacional, pueda deducir una noción o concepto matemático. Posteriormente, al aplicar continuamente estos conceptos matemáticos en la resolución de nuevas situaciones problemáticas con alguna similitud, el estudiante adquirirá la habilidad pero no de manera mecánica sino como una demostración de la construcción de su pensamiento matemático.

Lamas, también propone deducir conceptos matemáticos a partir de la construcción de objetos matemáticos (Nivel concreto) para desarrollar procesos operacionales que posteriormente han de convertirse en nociones, conceptos y leyes matemáticas que pueden ser generalizados y aplicados a nuevas situaciones problemáticas además de servir de base y fundamento para la construcción de nuevos campos temáticos de las matemáticas.

2.2.6. Situaciones didácticas. En el enfoque por competencias y de acuerdo al currículo nacional, hace referencia a situaciones problemáticas como algo intencional para generar actividades y construir conocimientos. Por lo general, propone (Acosta & Rivera, 2009) afirma que “las actividades a realizar, debe ser la construcción y elaboración de material educativo pero aplicando conocimientos previos, tales como forma, propiedades, etc, o aplicar juegos didácticos que permitan construir nuevos conocimientos”. Apuntan a lograr los propósitos de aprendizaje, los cuales desde la planificación curricular implica la organización de las competencias, capacidades, desempeños así como conocimientos y actitudes que se observan en las evidencias de aprendizaje. El documento pedagógico en el que se construyen son las unidades didácticas.

2.2.7. Procesos didácticos de matemática. Los procesos didácticos son acciones y actividades que debe organizar y planificar el docente para ser ejecutados en el desarrollo de la sesión de aprendizaje y garantizar , consolidar el conocimiento a construir desarrollando competencias (Danilov, 1968) conceptúa como las “acciones exitosas que se desarrollan en la práctica del aula para una labor efectiva y eficiente” , es decir enlaza al estudiante con el objeto o campo temático a construir con el estudiante para que dicho aprendizaje sea significativo y tenga sentido para él. Desde luego, implica que el docente sea todo un artista y estratega en la construcción de conocimientos a partir de situaciones problemáticas.

En matemática, el enfoque de resolución de problemas propone cinco procesos didácticos los cuales a continuación desarrollamos.

2.2.7.1. Familiarización con el problema. Es cuando el estudiante empieza a comprender el problema, interpretar sus conceptos, extraer sus datos, e incluso aplicar estrategias como el parafraseo para interpretar dicho problema.

En este proceso, la función del docente es plantear la situación problemática y desplegar una serie de preguntas a los estudiantes para que pueda entender de qué trata el problema, los datos que contiene y si son suficientes estos datos para resolver el problema, las condiciones que propone, lo que pide el problema, si hay coherencia en la estructura del problema además de recordar y activar los saberes previos necesarios para resolver dicha situación problemática.

Ante ello, el estudiante debe emplear diversas estrategias para comprender e interpretar el problema, la vivenciación y la manipulación de materiales, mediante la recuperación de saberes previos, debe dejar al estudiante con las ideas claras y predisuestas a resolver la situación problemática.

2.2.7.2. Búsqueda y ejecución de estrategias. Luego que el estudiante haya comprendido el problema, es necesario que el estudiante busque y seleccione una estrategia o algunos recursos o materiales didácticos, que sea la más pertinente para resolver la situación problemática partiendo de saberes previos que le sirvan para construir nuevos conceptos, ideas, nociones, procedimientos, etc. (Álvarez, 2011) menciona que “el docente se encarga de promover esta búsqueda de estrategias mediante preguntas que impliquen indagación, exploración, induciendo al uso del material concreto ya sea estructurado o no”, de esta manera, el estudiante podrá representar la situación problemática regulando el tiempo y espacio requeridos para desarrollar tales actividades.

Este es el momento del acompañamiento en el que el docente observa las dificultades que presentan los estudiantes, puede ser en la representación ya sea con material o gráficamente, en la ejecución de los procedimientos, afirmaciones erróneas, sobre los cuales, mediante preguntas reflexivas, hacemos que detecten los errores y los puedan corregir para resolver correctamente la situación problemática. Aquí se debe observar una retroalimentación por reflexión o descubrimiento, que es lo que propone el enfoque por competencias.

De hecho, algunos grupos de estudiantes recurrirán a una solución por aplicación de algoritmos, otros expresarán sus dificultades, explicarán sus estrategias, compartirán sus resultados buscándole una explicación satisfactoria, otros grupos podrán cambiar de estrategia, fluctuarán entre la vivencia y la manipulación, para representarlo gráfica y simbólicamente, y comprobar la respuesta obtenida. La abstracción será evidenciada en algunos estudiantes.

2.2.7.3. Socialización de sus representaciones. En este proceso, los estudiantes intercambian sus experiencias, comparan y contrastan sus procedimientos, incluso reflexionan sobre sus dificultades y los descubrimientos que hallaron. Ponen mayor énfasis en las mejores representaciones buscando consolidar el aprendizaje esperado a observarse en el desempeño de cada estudiante. El docente formula preguntas que inducen a la inferencia para que vayan diferenciando el tránsito del nivel concreto, al gráfico y al abstracto. Brinda retroalimentación ante las dudas y orienta hacia la selección de las estrategias adecuadas utilizando un lenguaje matemático valorando los aportes de los demás estudiantes. El docente debe evaluar si los estudiantes ya están listos para una siguiente fase y así organizar los grupos o pares para la exposición. Dicha exposición debe ser aprovechada para

retroalimentar y afirmar procedimientos y conocimientos proponiendo lluvia de ideas, preguntas análogas. (Aravena & Kimelman, 2006) dice que “el aprendizaje se debe complementar con organizadores visuales y gráficos que sustenten los trabajos de los estudiantes.

2.2.7.4. Reflexión y formalización. Este es el proceso en el que se debe consolidar las propiedades, fórmulas, conceptos matemáticos, teoremas, axiomas y otros que puedan generalizarse para aplicar a otras situaciones problemáticas. En esta etapa es importante el acompañamiento del docente ya que debe conducir, guiar al estudiante a que utilizando el lenguaje formal, sistematice conceptos y propiedades matemáticas. Se deben establecer las conclusiones mediante preguntas a partir de los aportes de los estudiantes indicando su importancia y generalización de conceptos matemáticos. Es necesario hacer reflexionar al estudiante sobre el conocimiento construido, para su posterior explicación y aplicación. El alumno debe usar el lenguaje oral, escrito y gráfico simbólico de manera coherente. Se debe ayudar a encontrar las palabras de la especialidad que signifiquen la aplicación de algunas leyes y propiedades.

2.2.7.5. Planteamiento de otros problemas. Una vez adquirido el nuevo conocimiento matemático, el estudiante deberá estar en la capacidad de resolver nuevas situaciones problemáticas con la aplicación de los conceptos aprendidos, al mismo tiempo que podrá plantear nuevas situaciones problemáticas. El docente puede en este proceso, proponer espacios simulados o concretos a partir de los cuales, el estudiante pueda plantear nuevos problemas, sin perder de vista la coherencia en su redacción. En otras ocasiones, podrán proponer situaciones problemáticas que tengan que intercambiar con otros grupos de trabajo.

Deben observarse las leyes, propiedades o fórmulas que aprendieron desplegando su creatividad y raciocinio. Aunque inicialmente, sean problemas que sufran breves modificaciones, éstas deben ir mostrando su complejidad de manera gradual, utilizando diversas estrategias.

Respecto a los procesos didácticos, las rutas del aprendizaje propuestas por el ministerio de educación eran seis, comprensión del problema, búsqueda de la estrategia, representación (de lo concreto a lo simbólico), formalización, reflexión y transferencia, siendo estos procesos didácticos que permiten construir el pensamiento matemático, (Cantoral, 2005) propone cuatro

situaciones didácticas: “situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización”.

- a. **Las situaciones de acción.** Consiste en la organización de los estudiantes en torno a un ambiente físico, concreto, real o simulado en el cual se debe plantear una situación problemática, a ser resuelto con el aporte de los integrantes de cada equipo de trabajo.
- b. **Las situaciones de formulación.** Es el intercambio de ideas e información entre estudiantes de tal manera que puedan modificar el lenguaje común al lenguaje matemático, comunicando los avances y descubrimientos obtenidos en la resolución de la situación problemática.
- c. **Las situaciones de validación.** En este proceso, cada equipo sustenta, argumenta sus afirmaciones, realiza demostraciones que permitan comprobar tales afirmaciones, demostraciones que son llevadas a cabo mediante aplicación lógica de sus saberes previos, los que les sirvieron para llegar a la construcción del nuevo conocimiento.
- d. **Las situaciones de institucionalización.** Es cuando se llega a establecer formalmente el nuevo conocimiento como una propiedad, ley o fórmula matemática, capaz de ser aplicada a nuevas situaciones problemáticas. Además, estos conocimientos

son contrastados con los ya existentes para verificar lo certeros que han sido y cómo es que su proceso de construcción también ha sido válido.

2.2.8. Capacidades matemáticas. Para cada una de las competencias, las capacidades, aun siendo distintas en su formulación, tratan de combinarse entre ellos, a través de habilidades cognitivas con la finalidad de lograr la competencia. Fueron variando a partir de la implementación de las rutas del aprendizaje, cuando eran únicas para todas las competencias y eran seis, hasta la actualidad, de acuerdo al currículo nacional son solamente cuatro para cada competencia habiéndose precisado de acuerdo a cada competencia y son los que a continuación mencionamos.

2.2.9. Competencias matemáticas y sus capacidades

2.2.9.1. Competencia: Resuelve problemas de cantidad.

- a) Traduce cantidades a expresiones numéricas
- b) Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones
- c) Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo
- d) Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.

2.2.9.2. Competencia: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

- a) Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas.
- b) Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.
- c) Usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales.
- d) Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.

2.2.9.3. Competencia: Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.

- a) Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones
- b) Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones Geométricas
- c) Usa estrategias y procedimientos para orientarse en el espacio.
- d) Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas

2.2.9.4. Competencia: Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.

- a) Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas.
- b) Comunica la comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.
- c) Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.
- d) Sustenta conclusiones o decisiones basado en información obtenida.

2.2.10. Métodos de resolución de problemas.

2.2.10.1. Método de George Polya. Hungría (1887) En una disertación para optar el doctorado en la Universidad de Budapest con una tesis referente a probabilidades. Fue maestro en universidades de Suiza y Estados Unidos de Norteamérica. Entre sus estudios, trataba de poner mayor énfasis en los procesos que permitieron descubrir propiedades y teoremas, es decir, era necesario entender en cómo de descubrieron las propiedades antes que solo aplicarlo mecánicamente. De esta manera conseguía involucrar a los alumnos en la resolución de problemas matemáticos. En 1949 logró establecer cuatro fases o etapas para la resolución de problemas os que sirvieron posteriormente para un sinnúmero de estudios que lograron establecer algunos modelos con ciertos aportes y nuevas precisiones. Estas fases son las siguientes:

a) **Paso 1. Comprensión del problema.** Consiste en interpretar la situación problemática planteada, analizar la información que contiene, parafrasear, y determinar posibles decisiones a tomar. Generalmente, se procede a decodificar el texto para transformarlo al lenguaje matemático, observándose algunas dificultades, que luego mediante diferentes estrategias, deben conducir al estudiante a resolver el problema de manera satisfactoria.

Generalmente responde a preguntas como: ¿De qué trata el problema? ¿Puedes explicarlo con tus propias palabras? ¿Qué datos contiene el problema? ¿Es suficiente la información que contiene?

¿Contiene información irrelevante? ¿Alguna vez resolviste algún problema similar?

- b) **Paso 1. Concepción de un plan.** Polya considera fundamental esta fase, ya que una vez entendido el problema, se requiere planificar una serie de acciones y estrategias que nos conducirá a la resolución del problema. Ciertamente, en esta fase, el estudiante puede apoyarse de gráficos, o cualquier recurso didáctico pertinente para la representación y resolución del problema. Polya sugiere redactar este plan por escrito, y que dicha redacción sea de manera simple, clara, precisa y secuencial. Esto le permitirá al estudiante a revisar y corregir sus procesos de resolución y el docente pueda interpretar el pensamiento matemático desarrollado por el alumno. Actualmente, a esta fase se han agregado las estrategias heurísticas.

Generalmente responde a preguntas como: ¿Lograste resolver algún problema similar anteriormente?, ¿Es similar a otros problemas que analizaste? ¿Cómo podríamos dar utilidad a cada uno de sus datos?, ¿Conoces algún teorema, propiedad, ley o fórmula que te permita resolver este problema?, ¿Qué estrategias sería la más pertinente? ¿Te sería útil algún recurso didáctico en especial?

- c) **Paso 3. Ejecución del plan.** Es la aplicación de todas las estrategias y procedimientos diseñados en la elaboración del plan. Es necesario cumplir con la secuencia de actividades planificadas mediante un diálogo fluido entre los estudiantes, hasta llegar a una solución satisfactoria y factible de ser sustentada.

En esta etapa es necesario considerar interrogantes como:
¿Es coherente el plan que están ejecutando?, ¿Por qué?, ¿crees que habría otra forma de resolver dicho problema? ¿Qué otras estrategias crees que es factible aplicar para resolver dicha situación problemática? ¿Tienes alguna dificultad al ejecutar este plan? ¿Cuáles son las ventajas y desventajas del plan de ejecución que han diseñado?

- d) **Paso 4. Mirada o visión retrospectiva.** Polya, sugiere que un problema no culmina al resolver la situación problemática, que para aprender, es necesario comprender todo el proceso mediante la reflexión y el razonamiento. Por ello, debemos revisar todo el proceso de solución del problema, establecer los pasos correctos y detectar algunos errores o incoherencias hasta llegar al resultado obtenido, el que también debe ser interpretado respecto al problema. También se debe compartir otras posibles estrategias de solución, así como se esos procesos y estrategias podrían ser

aplicados a la solución de otras situaciones problemáticas. En esta fase suele realizarse las siguientes interrogantes:

¿Es correcta la solución obtenida?, ¿Por qué?, ¿Es posible una solución más fácil y efectiva?, ¿Qué significa el resultado obtenido?, ¿Puede resolver otros problemas similares?, ¿Cuáles deberían ser las condiciones?

2.2.10.2. Método de Guzmán. Por su estructura, (De Guzmán, 2007) propone que lo más importante para el estudiante es la manipulación de objetos matemáticos para que pueda ejercitar su creatividad entre otras capacidades mentales. Este matemático considera que el estudiante debe reflexionar permanentemente sobre los procesos de construcción de su pensamiento matemático de tal manera que al desarrollar estas actividades, adquiera seguridad y confianza además de enfrentar situaciones de la vida real con mayor eficacia. Del mismo modo hará reflexionar al estudiante sobre sus limitaciones al enfrentar un problema. Si el docente logra detectar esas deficiencias y las fortalece adecuadamente, el alumno podrá abordar cualquier problema con confianza y seguridad demostrando sus capacidades y habilidades adquiridas en este proceso. Luego Guzmán propone los siguientes procesos:

a) **Familiarizarse con el problema.** En este proceso se trata de interpretar, entender a fondo el problema, enfrentarlo determinado

su propósito o resultado a encontrar. Suelen formularse interrogantes como: ¿De qué trata el problema?, ¿Qué datos contiene? ¿Qué pide? ¿Son suficientes los datos de los que disponemos?, ¿Hay datos irrelevantes? ¿Están relacionados entre sí y son coherentes estos datos?, entre otras cuestiones.

b) **Búsqueda de estrategias.** A diferencia de Polya, Guzmán propone estrategias heurísticas que sean adaptables a una determinada situación problemática, entre ellos, menciona: Empezar por lo más fácil, Elaborar esquemas, diagramas o figuras, convertir a un lenguaje matemático adecuado, partir de un problema similar, empezar por el final, simplificación del problema, del cual posteriormente se desprendería la reducción a la unidad, entre otros.

c) **Llevar adelante la estrategia.** Es el momento de la aplicación de la estrategia más pertinente para resolver la situación problemática, o la que tenga mayor probabilidad de éxito. Algunas veces, son varias las estrategias que te permiten resolver un mismo problema, otras, en las que más adelante nos damos cuenta que habían procesos o estrategias más sencillas, debiendo adoptarla como la más adecuada. No debemos insistir en una sola estrategia.

d) **Revisión del proceso.** Luego de haber obtenido el resultado de manera satisfactoria, Guzmán sugiere la necesidad de pasar a una etapa de reflexión sobre el proceso de solución, propone algunas interrogantes como: ¿Qué caminos o estrategias utilizaste para resolver el problema?, ¿Qué significado tiene el resultado?, ¿Es posible generalizar la estrategia que utilizaste para resolver otras situaciones problemáticas?, etc.

2.2.10.3. Resolución de problemas según Alan Schoenfeld (1985). Los especialistas en pedagogía lo catalogan como el sucesor de Polya, aunque Schoenfeld sustenta sus trabajos y estudios en una corriente psicológica denominada el procesamiento de la información, que es distinta a la de Polya. Planteó sus conclusiones analizando sus conductas a personas expertas e inexpertas en la resolución de problemas. Concluye básicamente en que el estudiante aprende con mayor efectividad al desarrollar actividades de aprendizaje que implican la consideración de cuatro factores sumamente importantes y son:

a) **Recursos.** Es necesario que los estudiantes cuenten con saberes previos, leyes, propiedades, algoritmos, etc, otro factor es dominio disciplinar que debe tener el docente así como el dominio de las estrategias heurísticas que debe aplicar, la creatividad al plantear el

uso de recursos didácticos o materiales que pueden estar en la realidad o que puedan ser construidos en clase.

- b) **Heurística.** A diferencia de la propuesta desarrollada por Polya, Schoenfeld dice que existen tipos de problemas y que cada tipo, necesita una estrategia heurística particular. Es más, el norteamericano propone algunas estrategias heurísticas orientadas a cierto tipo de problemas, en cambio, Polya recurre solo al diseño de gráficos y esquemas.
- c) **Control.** Se refiere a la forma como el alumno gestiona de manera autónoma sus procesos, identificando incluso los errores que esté cometiendo. Schoenfeld dice que la persona que resuelve un problema debe ser capaz de ejecutar correctamente sus estrategias, por lo que, es necesario que se haya cumplido con los dos procesos anteriores, ya que será fundamental en la resolución de la situación problemática. También debe controlar sus procesos, cambiando si fuera necesario o en algunas oportunidades, modificarlo o adaptarlo. Al finalizar esta etapa, es necesario revisar todo el proceso.
- d) **Sistema de creencias.** Son las ideas o creencias que tiene el individuo respecto a la matemática, y son distintos, los del profesor, del estudiante y de la sociedad. Estas ideas, pueden ser determinantes sobre las actitudes que muestran los estudiantes frente a la resolución de problemas. Blanco (1996) sostiene que Schoenfeld considera que los procesos de solución de un problema es

zigzagueante, es decir, se van tomando distintas decisiones durante su resolución, al punto de muchas veces, retroceder y adelantar durante el proceso. Aun así, Schoenfeld propone estas cuatro fases y en cada fase, propone las siguientes estrategias heurísticas:

- **Análisis.** Implica trazar o elaborar un diagrama, examinar casos particulares y simplificar la situación problemática.
- **Exploración.** Es necesario examinar problemas equivalentes, problemas similares o ligeramente modificados o totalmente modificados.
- **Comprobación de la resolución obtenida.** Implica verificar criterios específicos como la pertinencia de los datos, concordancia con las estimaciones o predicción de cálculos estimados y sostenibilidad de los datos en el contexto real. Al mismo tiempo, se deben verificar criterios generales como la obtención de la misma solución por otros métodos o procedimientos, simplificación del problema, o aplicación de la misma estrategia a otros problemas similares.

2.2.10.4. Mason, Burton y Stacey. Se apoyan en las ideas construidas por Polya y Schoenfeld y escriben un libro denominado “Pensar matemáticamente” (1982) proponiendo un modelo que sea de ayuda y apoyo al proceso de instrucción del estudiante.

El objetivo, es demostrar el cómo debemos enfrentar un problema de manera efectiva y cómo aprender de las experiencias que se pueda adquirir en este proceso. Consideran que en todo momento se debe generalizar y particularizar las ideas y desarrollarlas a través de tres fases:

- a) **Abordaje.** En esta fase, el estudiante debe familiarizarse con la situación problemática, generalmente lo hace respondiendo a preguntas estratégicamente planteadas por el docente, tales como, ¿De qué trata el problema?, ¿Puedes expresarlo con tus propias palabras?, etc.
- b) **Ataque.** En esta fase, el estudiante debe formular sus conjeturas, plantear sus hipótesis, ejecutar sus estrategias para resolver el problema. Este proceso implica además, justificar cada una de las acciones que realiza el aprendiz.
- c) **Revisión.** Los autores proponen que en esta fase se ejecute la comprobación de las operaciones y cálculos realizados para aplicar posteriormente a nuevas situaciones problemáticas.

2.2.10.5.El método Heurístico de Bransford y Stein. También denominado como Método “IDEAL” ha sido formulado por John Bransford y Barry Stein (1984) quienes proponen cinco pasos que a continuación detallo:

- a) **Identificación del problema.** Tiene la finalidad de reconocer en qué consiste el problema, de tal manera que tenga la factibilidad de poder representarlo.
- b) **Definición y representación del problema.** En este paso, se requiere describir el problema y representarlo con toda la precisión posible. Una forma de representarlo suele ser formulándolo en forma de interrogante. Si se hace una adecuada representación, la solución a obtener será satisfactoria.
- c) **Exploración de posibles estrategias viables.** Es la investigación y el conocimiento de distintas estrategias heurísticas, hasta identificar alguna de ellas que sea más factible de ser aplicado a la resolución de una determinada situación problemática.
- d) **Actuación.** Es la solución propiamente dicha del problema considerando un adecuado concepto y una estrategia seleccionada y planificada adecuadamente.
- e) **Logros.** Es cuando se observa y evalúa las consecuencias de cada una de las acciones llevadas a cabo para la resolución del problema hasta la interpretación del resultado obtenido.

2.2.10.6. Modelo de Descartes. La solución de problemas, siempre ha sido un tema de estudio de muchos matemáticos desde tiempos muy antiguos, René Descartes (1596 – 1650) no ha sido ajeno a esta situación, él establece en síntesis cuatro pasos para la solución de situaciones

problemáticas de matemática, y si bien no los nombra, los describe de la siguiente manera:

- a) Negar totalmente el problema hasta que se logre reconocer claramente de lo que trata.
- b) Descomponer el problema en tantas partes como sea posible examinarlo.
- c) Dar un sentido y orden a mis reflexiones, iniciando por los más fáciles y simples de ser comprendidos.
- d) Organizar el proceso de revisión para tener la seguridad de no haber omitido proceso ni dato alguno.

Se puede inferir que René Descartes, para obtener o construir el conocimiento a partir de un problema, simplemente ponía todo en duda, luego recurría a la intuición, recurriendo a la aplicación de diferentes procesos que le conducían a la deducción de conceptos matemáticos.

2.2.10.7. El modelo de Wallas. Graham Wallas (1926) En su época, se considera como el modelo más relevante de las propuestas pedagógicas referidas a la resolución de problemas estableciendo cuatro fases que se describen a continuación.

- a) **Preparación.** Es el proceso de recolección de información respecto al problema con la intención de buscar una solución.

- b) **Incubación.** Hace referencia a una etapa de abandono o descanso, de realizar otras actividades para luego retomar la situación problemática.
- c) **Iluminación.** Es el momento cuando surgen las ideas claves que nos conducirá a la resolución del problema.
- d) **Verificación.** Una vez resuelto el problema, es necesario efectuar su comprobación para dar confiabilidad al resultado.

2.2.11. Propuesta de Métodos de resolución de problemas. Surge como una necesidad de entender las distintas propuestas y consolidarlas como ya lo hicieron algunas entidades encargadas del sistema educativo en sus respectivos países. El estudiante debe ir aprendiendo las matemáticas y construir este pensamiento de manera sistemática, bajo unos mismos procesos que les permitirán adquirir conocimientos que inmediatamente se convertirán en saberes previos para la resolución de nuevos problemas matemáticos y la adquisición de nuevos conocimientos cada vez más complejos. El llevar adecuadamente estos procesos, les motivará a construir materiales, de los cuales dependerá el que tenga éxito en sus procesos de aprendizaje. Es labor del docente plantear situaciones problemáticas motivadoras y retadoras al estudiante, capaces de ser resueltos con la aplicación de saberes previos, siempre organizándose en función a fases, procesos o pasos que le ayude a resolver el problema satisfactoriamente. Creo conveniente establecer las siguientes fases:

- a) **Interpretación del problema.** En esta etapa debe ser fundamental entender la situación problemática planteada, procesos que son comunes a Schoenfeld, Polya y Bransford y Stein. Será de interés entonces entender de qué trata el problema, identificar los datos que contiene y lo que pide, una adecuada comprensión de lectura hará que sea eficaz este proceso. El saber inferir, puede ser una estrategia efectiva ya que generalmente los datos que contiene el problema no son expuestas de manera explícita.
- b) **Representación con material, gráfica y simbólica.** La representación con material concreto hace referencia a la manipulación de objetos matemáticos, a su construcción de objetos, pero también a la representación gráfica y simbólica, pero si la situación problemática está planteada en un contexto real, solo será necesario la vivenciación, es decir, el estudiante tendrá la posibilidad de hallar la solución del problema en el mismo campo real. (Díaz & Suárez, 2016) dice que “este proceso es importante ya que deja de lado la parte abstracta de la matemática, la cual será formalizada posteriormente, una vez construido el pensamiento matemático y su conocimiento disciplinar”.
- c) **Búsqueda y aplicación de estrategias.** En esta etapa, se debe tener mucho cuidado con que los estudiantes cuenten con los saberes previos suficientes sobre los algoritmos y operaciones matemáticas, así será más sencillo de que elijan una estrategia adecuada el cual le conducirá a una solución satisfactoria. Sin descuidar a Schoenfeld, será necesario

descomponer el problema en partes para analizar cada caso e establecer claramente el objetivo del problema.

d) Ejecución de la estrategia. Es la etapa de la aplicación del plan establecido en la fase anterior. Guzmán propone ejecutar las mejores ideas que hayamos tenido, y si fracasamos, no podemos desanimarnos, pero podemos cambiar de estrategia, validando cada acción que se está ejecutando para evitar los errores y dar por satisfactorio el resultado obtenido.

e) Reflexión y valoración del resultado obtenido. Esta es la última fase en la resolución de problemas pero no por ello la de menor importancia, es más, generalmente, nos permite identificar algunos errores que se hayan cometido en las fases anteriores. Se debe evaluar las estrategias utilizadas, así como la interpretación y la justificación del resultado obtenido. Es necesario considerar el análisis de la lógica utilizada, reflexionar sobre la pertinencia de los datos, así como la posibilidad de la resolución del problema por otras estrategias y métodos.

2.2.12. Modelo matemático Heurístico.

Cuando se menciona el modelo matemático heurístico, se refiere a la sistematización de varios modelos matemáticos empíricos que, a su manera, brindan soluciones a diferentes problemas matemáticos, sin embargo, cuando este modelo matemático se generaliza, pasa a ser

heurístico, porque obedece a parámetros muy bien definidos y dirigidos a distintos problemas matemáticos. Uno de los tantos ejemplos de modelos matemáticos heurísticos es el propuesto por George Polya, pero como él, hay varios autores que proponen diversos modelos matemáticos heurísticos, algunos más específicos porque están orientados solamente a determinados tipos de problemas. Estos modelos matemáticos heurísticos son acompañados de algunas estrategias que facilitan la solución de problemas y en un nivel concreto, muchas estrategias requieren de recursos didácticos, todo ello, forma parte de estos modelos matemáticos heurísticos que producen resultados óptimos.

Además, cabe destacar que es el docente quien debe dominar estos modelos matemáticos heurísticos así como una gran variedad de estrategias y recursos, ya que al momento de enfrentarnos a los estudiantes, (Crespo & Pizarro, 2014) destaca que “los alumnos obedecen a diferentes ritmos y estilos de aprendizaje”, además existen otros factores que intervienen en su aprendizaje como aspectos culturales y geográficos. (Castejón, 2014) menciona que “el entorno y la realidad cotidiana a la que se enfrenta cada día el estudiante influye en su rendimiento académico”.

2.2.13. Un modelo para el desarrollo del pensamiento matemático.

A partir de las situaciones didácticas planteadas, es necesario establecer un modelo para desarrollar el pensamiento matemático en las que se deben

establecer ciertas actividades que deben desarrollar los estudiantes, tales como:

- Los alumnos deben ser los responsables en su organización para la resolución de una situación problemática estableciendo un plan de acuerdo a sus habilidades personales y de grupo.
- El docente debe brindar acompañamiento y orientación apoyando mediante preguntas inferenciales que induzca a los estudiantes a una resolución correcta y satisfactoria de la situación problemática, justificando la coherencia del resultado obtenido.
- Las múltiples decisiones tomadas y las diferentes estrategias utilizadas por los estudiantes debe conseguir en el estudiante, su generalización para la resolución de nuevas situaciones problemáticas de similar estructura logrando el desempeño propuesto para el desarrollo de la sesión de aprendizaje planteada.
- El estudiante puede recurrir al uso de diversas estrategias heurísticas así como su representación a través de recursos y materiales didácticos que le servirán para sustentar sus fundamentos y razonamientos que le permitieron resolver la situación problemática.
- También es necesario que se apoyen en autores que proponen métodos para la resolución de problemas, tales como Polya, Guzmán, etc, las capacidades matemáticas, están fundamentadas y organizadas bajo los mismos principios que propusieron estos autores.

2.2.14. Los procesos cognitivos. Los procesos cognitivos son los que nos permiten procesar los saberes, conocimientos y todo tipo de información que recibimos a través de los sentidos, y que luego de haberse producido el aprendizaje, los podemos utilizar de manera coherente en nuestra interacción con el mundo real. Se evidencia en cualquier actividad cotidiana que desarrollamos, porque para aprender toda la información que hemos recibido, los hemos asimilado a través de los procesos cognitivos, y éstas nos permiten aplicar frente a cada actividad o situación problemática de nuestro entorno que tengamos que resolver, a su vez que seguimos aprendiendo nuevas cosas, ya sea por descubrimiento o por aplicación de acciones lógicas, construyendo nuevos conocimientos. Estos procesos cognitivos son:

2.2.14.1. La percepción. Es cuando construimos un determinado conocimiento en base a alguna sensación percibida por nuestros órganos de los sentidos, generalmente es de tipo experimental, en matemática, el uso de recursos y materiales didácticos mediante la manipulación es ideal para la adquisición de conocimientos.

2.2.14.2. La atención. Su función es muy importante porque nos permite enfocarnos en alguna actividad determinada, discriminando cualquier tipos de información proveniente del ambiente que nos rodea, procesando solamente la información que es de nuestro interés. Las áreas de las ciencias, exigen bastante de este proceso

cognitivo debido a la complejidad de la construcción de las leyes, teoremas, fórmulas o cualquier nuevo conocimiento matemático.

2.2.14.3. La memoria. Es la capacidad que tenemos de almacenar información y recuperarlo cuando necesitamos. Según el cono de (Dale, 1969) en su trabajo (Cone of experience); el cono de la experiencia, concluye que luego de dos semanas, solo recordamos el 10% de lo que leemos, el 20% de lo que oímos, el 30% de lo que vemos, el 50% de lo que oímos y vemos, el 70% de lo que decimos, pero fundamentalmente, recordamos hasta el 90% de lo que decimos y hacemos. Por ello, la necesidad de que el estudiante realice actividades, construya sus objetos matemáticos, aprenda la matemática en el nivel concreto, ya que los conceptos construidos de esa manera, podrán ser recordados con mayor posibilidad y los podrá aplicar a cualquier nueva situación del contexto.

2.2.14.4. Pensamiento. Está referido a la capacidad que tenemos de generar y crear ideas, tomar decisiones adecuadas y asertivas, resolver situaciones problemáticas, formas de actuar ante dificultades, argumentar conceptos, formalizar conclusiones, propiedades y teorías entre tantas otras funciones que implica el procesamiento sistematizado de la información. Por lo complicado que es la construcción del pensamiento, es organizado por etapas,

por ejemplo, en matemática, las nociones de adición y sustracción se construyen con las nociones de agregar, aumentar, quitar, etc.

2.2.14.5. Lenguaje. Es una de las funciones cognitivas principales ya que es la base para el desarrollo de los otros procesos cognitivos. En sus diferentes niveles, implica utilizar un complejo sistema de sonidos y símbolos, estructurados de tal manera que una sociedad en común, sea capaz de transmitir sus ideas de manera clara y precisa.

La sistematización y contextualización de los conocimientos matemáticos conforman el pensamiento matemático a partir de los conceptos, propiedades e instrumentos de su ámbito. El estudiante, alcanza su formación matemática cuando desarrolla su pensamiento matemático más complejo y será capaz de resolver distintas situaciones problemáticas que enfrente en su contexto.

Dienes, propone cuatro principios fundamentales para el aprendizaje de las matemáticas, y son:

- **Principio dinámico.** Es experimental, y comprende el juego dividido en tres etapas de construcción de la noción matemática.
- **Principio de construcción.** Que se inicia con la manipulación de los materiales en forma de juegos, pero que contienen desarrollos y aplicaciones lógicas.

- **Principio de variabilidad perceptiva.** En esta etapa es cuando se logra establecer las deducciones lógicas por un proceso de construcción de los juegos con los materiales educativos.

- **Principio de la variabilidad matemática.** Permite establecer aplicaciones de conceptos y propiedades matemáticas al resolver diversas situaciones. Pueden llegar a determinar algunas generalizaciones.

En base a estos fundamentos, **Piaget**, establece las siguientes fases:

- Manipulativa
- Gráfica
- Simbólica

Ausubel, sostiene que el niño debe ser el autor del aprendizaje significativo, partiendo de los conocimientos previos generados a partir de sus mismas necesidades de aprendizaje, y en la manipulación y representación gráfica de sus ideas matemáticas, este niño será un sujeto activo constructor de sus propios aprendizajes y conocimientos.

2.3. Marco conceptual

2.3.2. Definiciones operacionales.

2.3.2.1. Niveles del pensamiento matemático. De los fundamentos propuestos por Jean Piaget, podemos establecer los niveles concreto, pictórico o gráfico y simbólico.

- a) **Nivel concreto.** Se considera como el primer nivel del proceso de abstracción matemática. Aquí se produce la experimentación con el material didáctico, o con el material concreto estructurado y/o no estructurado.
- b) **Nivel gráfico.** Lo anteriormente representado con material concreto, es llevado a un segundo nivel, en este nivel llamado también gráfico – pictórico, el estudiante realiza representaciones gráficas, evidenciándose procesos lógicos que parten de conceptos y propiedades matemáticas.
- c) **Nivel abstracto.** También denominado por algunos autores como simbólico, el estudiante resuelve situaciones problemáticas matemáticas mediante la aplicación de fórmulas, propiedades y algoritmos, habiendo partido de uso de material concreto, pasando por las representaciones gráficas.

2.3.2.2. Los niveles de pensamiento geométrico

La fundamentación teórica de los niveles del pensamiento geométrico han sido planteados por los holandeses de apellido Van Hiele, de ello, nace la denominación de esta teoría como el método Van Hiele.

Esta propuesta comprende dos partes:

- Los niveles del pensamiento o razonamiento geométrico.
- Las fases del aprendizaje de la geometría.

Los niveles que propone Van Hiele, no dependen de la edad, más sí, del campo temático que se aprende. Es más, afirman que para pasar de un nivel a otro, son necesarios los saberes previos, los que se hallan en el nivel anterior, es decir que un nivel determinado, es prerequisite para el siguiente nivel.

Además establece que depende del dominio de un determinado nivel, para aplicar sus propiedades estableciendo relaciones al aplicarlo a la resolución de nuevas situaciones problemáticas.

El aprendizaje bajo este modelo, implica la existencia de dos elementos fundamentales, el lenguaje y la significatividad o importancia de cada campo temático.

Los niveles propuestos por Van Hiele son mencionados a continuación:

NIVEL 0: Visualización o reconocimiento

NIVEL 1: Análisis

NIVEL 2: Ordenación o clasificación

NIVEL 3: Deducción formal

NIVEL 4: Rigor

2.3.2.3. Fases del proceso de enseñanza bajo el modelo Van Hiele

Van Hiele, en su trabajo de investigación, proponen un conjunto de actividades pedagógicas organizadas a los que le denominan “fases”. Independientemente de la edad de los educandos, la organización de estas actividades determinará los niveles de logro, en cualquier campo temático de la geometría desarrollado por ellos.

Estas fases son:

Fase 1. Información

Fase 2 Orientación dirigida

Fase 3 Explicación

Fase 4 Orientación libre

Fase 5 Integración

En este modelo, Van Hiele describe que el nivel 5, es el más difícil de alcanzar, pero que sin embargo, son los estudiantes del nivel superior y/o universitarios, los llamados a alcanzar todos los niveles.

CAPÍTULO III: MÉTODO

3.1. Tipo de investigación

El trabajo de investigación es una investigación aplicada ya que se pondrá en evaluación los niveles del pensamiento matemático aplicado en la enseñanza de la matemática en el segundo año de educación secundaria de la Institución Educativa Emblemática “Francisco Antonio de Zela” Tacna, en el año 2018, niveles del pensamiento matemático que sustentan el enfoque por competencias, estudio que pretende dar respuesta sobre el tránsito de un enfoque por conocimientos hacia un enfoque por competencias.

Investigación Experimental

Nivel: Pre experimental

3.2. Diseño de investigación

Se trabajó con un diseño pre experimental, con un solo grupo. Este diseño siguió el siguiente esquema:

$$RG_E \quad O_1 \quad X \quad O_2$$

Dónde:

O_1 = Resultados del Pre Test.

X = Variable experimental.

O_2 = Resultados del Post Test.

3.3. Población y muestra

a) Población y muestra.

302 estudiantes de las 12 secciones del segundo año de educación secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela – Tacna – 2018, cuya relación se adjunta entre los anexos del presente trabajo de investigación.

Tabla 2.

Tabla de población y muestra

Secciones	Cantidad de estudiantes	Población y muestra
Segundo A	27	Muestra
Segundo B	26	Muestra
Segundo C	25	Muestra
Segundo D	25	Muestra
Segundo E	25	Muestra
Segundo F	27	Muestra
Segundo G	26	Muestra
Segundo H	24	Muestra
Segundo I	26	Muestra
Segundo J	24	Muestra
Segundo K	23	Muestra
Segundo L	24	Muestra
TOTAL	302	

Fuente: Elaboración propia

3.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos.

3.4.1. Técnica

- Examen.- En este estudio se aplicó el examen escrito “medición del logro de capacidades en matemática para el segundo grado de educación secundaria – 2018” elaborado por un equipo de especialistas de la Dirección regional sectorial de Educación de Tacna en coordinación con los especialistas de la Unidad de Gestión Educativa Local de Tacna en concordancia con una matriz de competencias, capacidades y desempeños según el currículo nacional.

3.4.2. Instrumento

- Prueba escrita. Se aplicó un examen escrito de entrada denominado Evaluación de diagnóstico “medición del logro de capacidades en matemática para el segundo grado de educación secundaria – 2018” en el grupo de estudio. finalmente, también se aplicó un examen similar, elaborado bajo la misma matriz de competencias y desempeños, “medición del logro de capacidades en matemática para el segundo grado de educación secundaria – 2018” evaluación de salida en el grupo de estudio.

3.5. Técnicas de procesamiento y análisis de datos.

Organizadores visuales

- Tablas de distribución de frecuencias.
- Medidas descriptivas.

3.6. Medida de tendencia central.

Se caracteriza porque sus datos tienden a agruparse hacia el centro de los datos y el gráfico resultante. La medida de tendencia central que se aplicará será:

a) **Media aritmética.-** Conocido también como promedio, es la suma de los “n” primeros términos divididos entre el total de datos o términos que forman parte del estudio.

3.7. Medidas de dispersión. -

Su función es organizar y sistematizar los datos estadísticos, de tal manera que este valor sea representativo. Tiene el objetivo de cuantificar el alejamiento, separación o variación de los datos estadísticos respecto a un punto medio o centro.

a) **Variación (s^2):** Representa la variación de un conjunto de datos estadísticos en comparación con su media aritmética o promedio.

b) **Desviación típica (S):** Permite verificar los resultados aproximando su generalización desde las muestras hacia la población. Se calcula mediante la raíz cuadrada de la varianza respecto a la variable.

c) **Los estadígrafos de prueba.** Permiten comprobar las hipótesis planteadas en la investigación y se utilizaron la prueba no paramétrica de

Chi-cuadrado y la prueba de hipótesis para muestras relacionadas (Z, para $n \geq 30$).

3.8. Análisis de datos

- a. Interpretación:** Se interpretarán las tablas y gráficos considerados.
- b. Pruebas de hipótesis:** Se comprobarán cada una de las hipótesis planteadas.

1. Comprobación de sub hipótesis 1

- **H₀:** Los niveles del pensamiento matemático de las alumnas del segundo año de secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela, no es deficiente.
- **H₁:** Los niveles del pensamiento matemático de las alumnas del segundo año de secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela, es deficiente.

2. Comprobación de sub hipótesis 2

- **H₀:** Los resultados de logro de las estudiantes del segundo año de secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela, al aplicar los niveles de pensamiento matemático, no es regular.
- **H₁:** Los resultados de logro de las estudiantes del segundo año de secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela, al aplicar los niveles de pensamiento matemático, es regular.

3. Comprobación de sub hipótesis 3

- **H₀:** La aplicación de los niveles de desarrollo del pensamiento matemático no influye en los niveles de logro en matemática en las estudiantes del segundo año I.E.E. Francisco Antonio de Zela.
- **H₁:** La aplicación de los niveles de desarrollo del pensamiento matemático influye en los niveles de logro en matemática en las estudiantes del segundo año I.E.E. Francisco Antonio de Zela.

3.9. Validez de los instrumentos de evaluación.

Han sido diseñados por un equipo de especialistas de la Dirección Regional Sectorial de Tacna, basados en las competencias y capacidades matemáticas de acuerdo al Currículo Nacional, seleccionando los indicadores de desempeño establecidos para el segundo año de educación secundaria a partir de las rutas del aprendizaje. Para su aplicación, han sido los mismos especialistas y el equipo de elaboración de las pruebas de diagnóstico, proceso y salida denominado “Medición de capacidades en matemática para el segundo grado de Secundaria 2018” quienes se encargaron de su validación.

Estas pruebas han sido aplicadas a todos los estudiantes de 2° grado de Educación secundaria de las instituciones educativas públicas y privadas de las cuatro provincias de la región Tacna. La finalidad de estas evaluaciones ha sido la preparación de los estudiantes para la evaluación ECE a aplicarse a los estudiantes de 2° año, a nivel nacional.

CAPÍTULO IV: PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

4.1. Presentación de resultados

Se presentan los resultados de los niveles de logro obtenidos por las estudiantes del segundo año de secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela en el grupo de control (pre test) y experimental (post test).

Tabla 3

Niveles de logro en el (Pre test y post test).

Logro	Control		Experimental	
	Nº	%	Nº	%
Previo al inicio (0-25)	108	35,76	32	10,60
Inicio (26-51)	161	53,31	132	43,71
En proceso (52-77)	31	10,26	89	29,47
Logrado (78-103)	2	0,66	49	16,23
Total	302	100,00	302	100,00

Fuente: Elaboración propia

Se observa la tabla de la prueba de entrada y salida con los niveles de logro obtenidos por las estudiantes en el grupo de control y experimental con un 36% y 11% en el nivel previo al inicio respectivamente, 53% y 44% en Inicio, 10% y 29% en proceso y el 1% y 16% en el nivel satisfactorio.

Tabla 4

Cuadro de interpretación de medida descriptiva.

Medida descriptiva	Estudiantes	
	Pre test	Post test
Media	32,01	53,16

Fuente: Elaboración propia

INTERPRETACIÓN

La valoración promedio del post test es 53,16, mientras que en el pre test es 32,01. Por lo tanto, se observa que hay una elevación en los niveles de logro obtenidos por las estudiantes del segundo año de educación secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela – Tacna en el año 2018.

4.2. Contrastación de hipótesis

A continuación, presento la contrastación de hipótesis mediante la aplicación de estadígrafos correspondientes para verificar la hipótesis general y específicas.

Prueba de hipótesis específica 1 (sub hipótesis 1):

Los niveles del pensamiento matemático de las alumnas del segundo año de secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela, es deficiente.
--

1) Formulación de hipótesis

H₀: Los niveles del pensamiento matemático de las alumnas del segundo año de secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela., no es deficiente.

H_a: Los niveles del pensamiento matemático de las alumnas del segundo año de secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela, es deficiente.

2) Nivel de significancia

$\alpha=0,05$

3) Estadístico de prueba

Se aplicará la prueba de Chi-cuadrado para una variable: Prueba Bondad de ajuste.

$$X_c^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)_i^2}{e_i} \square X_{(k-1)}^2$$

Utilizando el paquete estadístico SPSS, se obtuvo el siguiente resultado:

Tabla 5.

Cuadro de aplicación de prueba Chi-cuadrado para sub hipótesis 1.

Estadístico de prueba	Control
Chi-cuadrado	208,596
gl	3
Sig. asintótica	0,000

Fuente: SPSS versión 26.0

4) Decisión y conclusión

Como el p-valor = 0,000 es menor que el nivel de significancia ($\alpha=0,05$), entonces se rechaza H_0 . Es decir, se concluye que, *los niveles del pensamiento matemático de las alumnas del segundo año de secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela, es deficiente*, para un nivel de significancia del 5%.

Prueba de hipótesis específica 2 (subhipótesis 2):

Los resultados de logro de las estudiantes del segundo año de secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela, al aplicar los niveles de pensamiento matemático, es regular.

1) Formulación de hipótesis

H_0 : Los resultados de logro de las estudiantes del segundo año de secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela, al aplicar los niveles de pensamiento matemático, no es regular.

H_a : Los resultados de logro de las estudiantes del segundo año de secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela, al aplicar los niveles de pensamiento matemático, es regular.

2) Nivel de significancia

$\alpha=0,05$

3) Estadístico de prueba

Se aplicará la prueba de Chi-cuadrada para una variable: Prueba Bondad de ajuste.

$$X_c^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)_i^2}{e_i} \square X_{(k-1)}^2$$

Utilizando el paquete estadístico SPSS, se obtuvo el siguiente resultado:

Tabla 6.

Cuadro de aplicación de prueba Chi-cuadrado para sub hipótesis 2.

Estadístico de prueba	Experimental
Chi-cuadrado	79,060
gl	3
Sig. asintótica	0,000

Fuente: SPSS versión 26.0

4) Decisión y conclusión

Como el p-valor=0,000 es menor que el nivel de significancia ($\alpha=0,05$), entonces se rechaza H_0 . Es decir, se concluye que, *los resultados de logro de las estudiantes del segundo año de secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela, al aplicar los niveles de pensamiento matemático, es regular*, para un nivel de significancia del 5%.

Prueba de hipótesis específica 3 (subhipótesis 3):

La aplicación de los niveles de desarrollo del pensamiento matemático influye en los niveles de logro en matemática en las estudiantes del segundo año I.E.E. Francisco Antonio de Zela.

1) Formulación de hipótesis

H_0 : La aplicación de los niveles de desarrollo del pensamiento matemático no influye en los niveles de logro en matemática en las estudiantes del segundo año I.E.E. Francisco Antonio de Zela.

H_a : La aplicación de los niveles de desarrollo del pensamiento matemático influye en los niveles de logro en matemática en las estudiantes del segundo año I.E.E. Francisco Antonio de Zela.

2) Nivel de significancia

$$\alpha=0,05$$

3) Estadístico de prueba

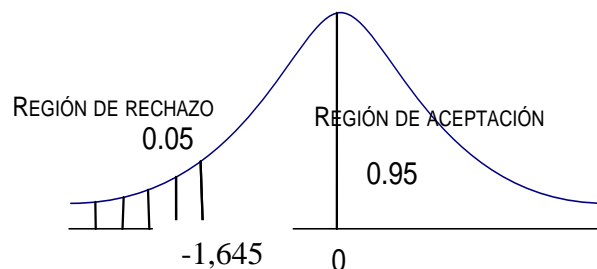
Se aplicará la prueba de hipótesis para muestras relacionadas ($n \geq 30$).

$$Z_c = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\frac{S_d}{\sqrt{n}}} = \frac{-21,146 - 0}{\frac{25,784}{\sqrt{302}}} = -14,25$$

4) Región de Rechazo ó aceptación

Figura 1.

Prueba de hipótesis usando prueba de hipótesis relacionadas.



5) Decisión y conclusión

Como el valor de $-14,25$ cae en la región de rechazo, entonces se rechaza H_0 . Es decir, se concluye que, *la aplicación de los niveles de desarrollo del pensamiento matemático influye en los niveles de logro en matemática en las estudiantes del segundo año I.E.E. Francisco Antonio de Zela.*, para un nivel de significancia del 5%.

4.3. Discusión de resultados.

A partir de los resultados obtenidos en el presente trabajo de investigación, se acepta la hipótesis alterna general, es decir que existe una relación directa entre la aplicación de los niveles de construcción del pensamiento matemático y los niveles de logro en matemática entre las alumnas del segundo año de Educación secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela durante el año 2018.

Estos resultados son concordantes con lo que sostiene (Franco, 2015) quien afirma que el uso y la manipulación del material educativo concreto juega un rol trascendental en el momento de la adquisición de las nociones matemáticas (construcción del pensamiento matemático), sin embargo, es el docente quien a través de la retroalimentación, permite verificar el cumplimiento de los objetivos propuestos, hipótesis que también sostiene (Fernández, 2003) al referirse que la construcción del pensamiento matemático, pasa inicialmente por la manipulación de materiales, su representación gráfica y la simbolización; es decir los niveles del pensamiento matemático, es el fundamento del enfoque de resolución de problemas el cual es propuesto por el Ministerio de Educación del Perú en el currículo nacional. (Del Castillo, 2008) agrega que existe una correlación muy alta entre la buena práctica pedagógica del desempeño docente y los niveles de logro.

Sin embargo, Restrepo no hace referencia directa a los niveles del pensamiento matemático, pero al mencionar el uso de materiales educativos estructurados y no estructurados y considerar la representación gráfica y luego simbólica, está haciendo mención implícita a los niveles del pensamiento matemático, como parte del enfoque de resolución de problemas.

Los niveles de logro obtenidos en la prueba de entrada, coinciden con el rendimiento académico obtenido en el pre test por (Guevara, 2017), Díaz (2018), (García, 2013), (Leiva, 2016), Villarroel (2018) y (Esteba & Gamarra, 2019) quienes en sus trabajos de investigación observan dificultades en el desarrollo de los test resueltos por los estudiantes antes de aplicárseles estrategias, materiales educativos y juegos didácticos que les permita mejorar el rendimiento académico en los estudiantes.

De estos autores, (Guevara, 2017) recurre a “Polya como estrategia para la resolución de problemas matemáticos”; de ello se desprende dos diferencias marcadas en el presente trabajo de investigación, la primera es que Polya, metodológicamente propone un método, posteriormente denominado método Polya el cual es más sistemático que una estrategia porque se generaliza a cualquier situación problemática, además Polya no hace referencia directa a los niveles del pensamiento matemático en su propuesta, aunque éstas, se hallan de manera implícita en cada uno de los pasos establecidos por George Polya. (Del Castillo, 2008) descubrió que “una abrumadora mayoría de

docentes (87,93%) presentan deficiencias moderadas y severas en su práctica pedagógica influyendo en los resultados del pre test”.

Al analizar la hipótesis los niveles de logro de las estudiantes del segundo año de secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela, es regular, es posible afirmar que en el proceso se observa una mejora en los niveles de logro, este progreso coincide con los hallazgos obtenidos por (Pérez, 2014) en su tesis “influencia de la estrategia didáctica planificación - ejecución en el nivel de desarrollo de las capacidades del área de matemática en los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de la institución educativa el Cumbe – Cutervo – 2014” cuando afirma que la estrategia aplicada a los estudiantes produjo un progreso significativo en el desarrollo de sus capacidades ya que implicó aplicar diferentes procesos entendiendo el problema como un conjunto de procedimientos. Villarroel (2018) al aplicar el método de solución de problema, demuestra que la aplicación sistemática de métodos (estrategias y recursos didácticos) incrementa progresivamente el rendimiento académico.

Contrariamente a esta afirmación, (Díaz & Suárez, 2016) destaca un hallazgo en el municipio de Chimalhuacán (México) en la que afirma que “la matemática suele restringirse solo a ciertos estudiantes privilegiados ya que son los alumnos por excelencia inteligentes o en todo caso que son asistidos por un docente externo o particular, o en su defecto cuentan con una base teórica de alta calidad”.

En la demostración sobre la influencia de la aplicación de los niveles de desarrollo del pensamiento matemático sobre los niveles de logro en matemática se observa un progreso en los niveles de logro en las estudiantes del segundo año I.E.E. Francisco Antonio de Zela; ya que se puede evidenciar un incremento en los niveles de logro obtenidos en la prueba del post test, para un nivel significativo del 5%, lo cual coincide con los autores (Guevara, 2017), (Franco, 2015) Díaz (2018), (Guzmán, 2014), (Huamanlazo, 2015), (Esteba & Gamarra, 2019) y Villarroel (2019) quienes al trabajar en sus tesis de manera implícita los niveles del pensamiento matemático, logran conseguir mejoras en el rendimiento académico obtenido por los estudiantes al finalizar la ejecución de sus proyectos de investigación. En sus trabajos, muchos de ellos tal como (Guevara, 2017) y (Guzmán, 2014), se apoyan en el constructivismo propuesto por Piaget junto a Vigotsky, Lave y Wenger, Bransford, Hasselbring, Grabinger, Spiro y Cols entre otros.

Por otro lado, (Guevara, 2017) dice que “se produjo un incremento en el rendimiento académico debido a la aplicación del pensamiento de George Polya” mencionando a Polya como estrategia, sin haber considerado que los niveles del pensamiento matemático y las capacidades que desarrollan competencias están implícitos en los pasos que Polya propone para resolver problemas matemáticos. (Esteba & Gamarra, 2019) hacen referencia al geogebra como recurso didáctico y concluye que “incrementa significativamente los niveles de logro considerando en que los niveles de

logro involucran a los recursos didácticos”. (Franco, 2015) concluye que “la manipulación del material concreto produce la mejora de los aprendizajes”, considerando solo como una fase fundamental para la resolución de problemas mas no como un componente fundamental de los niveles del pensamiento matemático en la que la representación gráfica y la abstracción van de la mano en el enfoque de la construcción del pensamiento matemático tal como lo propone Piaget junto a Vigotsky, Lave y Wenger, Bransford, Hasselbring, Grabinger, Spiro y Cols entre otros representantes visibles del constructivismo y que sustentan el enfoque por competencias propuesto por el ministerio de Educación.

CAPÍTULO V: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

1. En esta tesis se determinó el valor Chi-cuadrado calculado $\chi_0^2 = 208,596 \in$ *Región Crítica*, donde $(p < \alpha)$, para la prueba de entrada. Por lo tanto, se concluye que hay evidencia estadística suficiente para afirmar que los niveles del pensamiento matemático en la enseñanza de la matemática en el segundo año de educación secundaria de la Institución Educativa Emblemática Francisco Antonio de Zela – Tacna era deficiente; para un nivel de significancia del 5%.
2. La aplicación de estrategias que permitan mejorar los niveles de construcción del pensamiento matemático aplicados en la enseñanza de la matemática en el segundo año de educación secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela – Tacna, se obtuvo en la prueba de Chi-cuadrado el valor de $\chi_0^2 = 79,060 \in$ *Región Crítica*, donde $(p < \alpha)$, para la prueba de salida; es decir, los resultados de los niveles de logro obtenidos por las estudiantes del segundo año de secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela, al aplicar los niveles de construcción del pensamiento matemático, es regular, para un nivel de significancia igual al 5%.

3. Se determina que la aplicación de los niveles de construcción del pensamiento matemático influye en los niveles de logro obtenidos por las estudiantes del segundo año de educación secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela – Tacna 2018, donde se determinó el valor de $Z_c = -14,25$, ubicándose en la región de rechazo, para un nivel de significancia del 5%.

5.2. Recomendaciones.

1. Se demostró que los niveles del pensamiento matemático en la enseñanza de la matemática en el segundo año de educación secundaria de la Institución Educativa Emblemática Francisco Antonio de Zela – Tacna era deficiente debido a los niveles de logro obtenidos así como la reciente implementación del enfoque por competencias de parte del ministerio de educación y las entidades correspondientes, por lo que se recomienda fortalecer tanto a los docentes, que provienen de una educación tradicional y su tránsito hacia el enfoque por competencias, como a los estudiantes quienes también perciben este cambio en la forma de construcción de sus conocimientos y emplear las estrategias didácticas que le permitan construir los aprendizajes en función a la aplicación de los niveles del pensamiento matemático.
2. La aplicación de los niveles de construcción del pensamiento matemático en la enseñanza de la matemática en el segundo año de educación secundaria de la I.E.E. Francisco Antonio de Zela – Tacna permite mejorar significativamente los niveles de logro de las estudiantes, por lo que se recomienda replicar la enseñanza de la matemática a partir de la aplicación de los niveles del pensamiento matemático partiendo de un nivel concreto, pasando al gráfico y culminando en el nivel abstracto o algorítmico.
3. La aplicación de los niveles del pensamiento matemático, requiere la implementación de una diversidad de recursos y materiales didácticos, así como un adecuado uso y aplicación por parte del docente quien a su vez por su misma naturaleza, conoce el área de matemática tanto en el uso de estrategias didácticas como materiales educativos empleando

coherentemente la estrategia heurística que consolide el empleo del recurso logrando construir adecuadamente el conocimiento matemático ya que se demostró que una adecuada aplicación de los niveles de construcción del pensamiento matemático, influyen en los niveles de logro obtenidos por las estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acosta, G., & Rivera, A. (2009). *Desarrollo del pensamiento lógico matemático*. Bogotá: Fundación San Mateo.
- Álvarez, M. (2011). *El perfil del docente en el enfoque basado en competencias*. Santiago del Estero: Educación.
- Aravena, M., & Kimelman, E. (2006). *Investigación educativa*. Santiago: Universitaria Arcis.
- Cantoral, R. (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.
- Castejón, J. (2014). *Aprendizaje y rendimiento académico*. Madrid: Imprenta Gamma.
- Crespo, N., & Pizarro, R. (2014). *Inteligencias múltiples y aprendizajes escolares*. Valparaíso: Universitaria.
- Danilov, M. (1968). *El proceso de la enseñanza en la escuela*. México: Grijalbo.
- De Guzmán, M. (2007). *Enseñanza de las ciencias y la matemática*. Madrid: Iberoamericana.
- Del Castillo, V. (2008). *Calidad de los componentes del desempeño docente y niveles de logro académico de los colegios estatales de Lima metropolitana*. Lima: Tesis doctoral por la universidad nacional de educación Enrique Guzmán y Valle.

- Díaz, C., & Suárez, G. (2016). *Guía de investigación en Educación*. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Díaz, J. (2015). *La resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento matemático en la educación secundaria*. La Habana: Tesis doctoral por la universidad de ciencias pedagógicas Enrique José Varona.
- Díaz, J. (2015). *La resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento matemático en la Educación Secundaria*. La Habana: Tesis Doctoral por la Universidad de Ciencias Pedagógicas.
- Díaz, J. (2018). *Los métodos de resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento matemático*. La Habana: Tesis de licenciatura por la universidad pedagógica de la Habana.
- Esteba, M., & Gamarra, E. (2019). *El geogebra como recurso didáctico en el aprendizaje de la geometría de los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la Institución Educativa Simón Bolívar de Moquegua*. Arequipa: Tesis por la universidad nacional San Agustín de Arequipa.
- Fernandez, J. (1994). *La naturaleza del material en la didáctica de la matemática*. Madrid: Comunidad Educativa Madrid.
- Fernández, J. (1994). *La naturaleza del material en la didáctica de la matemática*. Madrid: Comunidad educativa Madrid.

- Fernández, J. (2003). *El desarrollo del pensamiento matemático en educación infantil*. México: Trillas.
- Franco, R. (2015). *Diseño de material didáctico para el fortalecimiento del pensamiento matemático en la enseñanza de la educación básica y media*. Bogota: Tesis de Licenciatura por la Universidad Tecnológica de Pereira.
- García, P. (2013). *Juegos didácticos para el aprendizaje de la matemática*. Quetzalemango : Tesis de licenciatura por la universidad Rafael Landívar.
- Guevara, E. (2017). *Estrategia de Polya en la solución de problemas matemáticos en alumnos de secundaria de las instituciones educativas de Acolla*. Junín: Tesis de maestría por la Universidad Nacional del Centro del Perú.
- Guzmán, J. (2014). Pensamiento matemático mediante el aprendizaje significativo. *Revista de matemática de la Universidad del Atlántico MATUA*, 64 - 65.
- Huamanlazo, J. (2015). *Estrategias didácticas del docente y el aprendizaje de los estudiantes en el área de matemática del tercer grado de secundaria en la institución educativa Francisco Irazola en la provincia de Satipo, año 2015*. Lima: Tesis de maestría por la Universidad Enrique Guzmán y Valle.
- Lamas, H. (2015). *Sobre el rendimiento escolar*. Lima: San Ignacio de Loyola.
- Leiva, F. (2016). *Aprendizaje basado en problemas como estrategia para el desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de educación*

secundaria. Quito: Tesis de maestría por la Universidad Politécnica salesiana del Ecuador.

Pérez, S. (2014). *Influencia de la estrategia didáctica planificación - ejecución en el nivel de desarrollo de las capacidades del área de matemática en los estudiantes de tercer grado de educación secundaria de la institución educativa El Cumbe – Cutervo*. Lima: Tesis doctoral por la Universidad Enrique Guzmán y Valle.

Tourón, J. (1985). *La predicción del rendimiento académico, procedimientos, resultados y aplicaciones*. Madrid: EDIS.

Villarroel, R. (2018). *Método solución de problema y aprendizaje significativo en estudiantes de secundaria en la Institución Educativa María Auxiliadora, Arequipa, 2016*. Puno: Tesis de maestría por la Universidad Néstor Cáceres Velásquez .